第32卷 第4期 1993年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 No.4 1993

赋范空间一些几何性质的对偶特征

韩景銮 黎永锦
（中山大学数学系）

摘 要 证明了本文定义的(G^*)，(K^*)性质是(G)，(K)空间的对偶性质；利用强暴露点的概念证明了一个Banach空间是一致光滑的充要条件，同时也证明了其它一些几何性质的对偶特征。

关键词 可凹点，PC点，暴露点，(G)空间，(K)空间

1 有关定义

文中$U(X)$，$S(X)$分别表示赋范空间X的闭单位球与单位球面，$x\in U(X)$称为可凹点，若对任意$\varepsilon>0$，$x\in\overline{\overline{CO}(U(X)\backslash B(x,\varepsilon))}$，$x\in U(X)$称为$PC$点，若恒等映射$I:(U(X),\sigma(X,X^*))\longrightarrow(U(X),\|\cdot\|)$在$x$点连续。$U(X)$的全体可凹点（$PC$点）记为dent $(U(X))$（$PC(U(X))$）。

定义1[1] 若$S(X)\subset\text{dent}(U(X))$，则称$X$是$(G)$空间。

定义2[1] 若$S(X)\subset PC(U(X))$，则称X是(K)空间。

(G)空间和(K)空间是两类重要的空间Fun.K.和Bor-Luh Lin等人在这方面都有重要的研究成果[1~3]。本文对这两类空间的对偶特征进行研究。为此，引入下面关于(G^*)，(K^*)空间的定义。文中$A_x=\{f\in S(X^*):f(x)=\|x\|\}$。

定义3 若对任意$x\in S(X)$，均有$A_x\subset\text{dent}(U(X^*))$，则称$X$是$(G^*)$空间。

定义4 若对任意$x\in S(X)$，均有$A_x\subset PC(U(X^*))$，则称X是(K^*)空间。

在下一节里我们证明了(G^*)，(K^*)的有关性质，表明了本文引入的定义3与定义4是能够表征(G)空间与(K)空间的对偶特征的。

利用有关暴露点的概念，我们给出空间的光滑性，非常光滑性，强光滑性与一致光滑性的一个统一的对偶特征。在讨论这些问题时，需要下面的概念。

定义5[4] $x\in S(X)$称为$U(X)$的一个暴露点，若存在$f\in S(X^*)$使$f(x)>f(U(X)\backslash\{x\})$。这时$f$又称为$x$的暴露泛函。

定义6[4] $x\in S(X)$称为$U(X)$的一个强暴露点，若存在$f\in S(X^*)$使

本文1993年4月1日收到
中山大学高等学术研究中心资助课题

$f(x)=\sup f(U(X))$ 且 $x_n\in U(X)$，$f(x_n)\to f(x)$ 时，$\|x_n-x\|\to 0$。

定义7　$x\in S(X)$ 称为 $U(X)$ 的一个弱—强暴露点，若存在 $f\in S(X^*)$，使

$f(x)=\sup f(U(X))$ 且 $x_n\in U(X)$　$f(x)$，$\to f(x)$ 时，$x_n\xrightarrow{w}x$。

定义8　$f\in U(X^*)$ 称为 $U(X^*)$ 的一个弱*—强暴露点，若存在 $x\in S(X)$，使

$x(f)=\sup x(U(X^*))$ 且，$f_n\in U(X^*)$，$x(f_n)\to x(f)$ 时，$f_n\xrightarrow{w^*}f$。

2　(G^*)，(K^*) 空间

定理1　设 X 是赋范空间，

(i) 若 X^* 是 (G^*) 空间，则 X 是 (G) 空间，

(ii) 若 X^* 是 (G) 空间，则 X 是 (G^*) 空间。

证明　(i) 设 $x\in S(X)$，但 $x\,\overline{\in}\,\mathrm{dent}(U(X))$ 于是存在 $\varepsilon>0$，使 $x\in\overline{CO}(U(X)\backslash B(x,\varepsilon))$，由Hahn—Banach定理，存在 $f\in S(X^*)$，使 $x\in A_f$，由于 $U(X^{**})\backslash B(Jx,\varepsilon)\supset J(U(X))\backslash JB(x,\varepsilon)$，其中 J 为 X 到 X^{**} 的典范映射。所以 $x\in\overline{CO}(U(X^{**})\backslash B(Jx,\varepsilon))$，从而 x 不是 $U(X^{**})$ 的可凹点，这是不可能的。故 X 是 (G) 空间。

(ii) 若 X 不是 (G^*) 空间，则存在 $x\in S(X)$，$f\in A_x$，但 $f\,\overline{\in}\,\mathrm{dent}(U(X^*))$，这与 X^* 是 (G) 空间矛盾，故 X 必然是 (G^*) 空间。

定理2　设 X 是赋范空间，

(i) X^* 是 (K^*) 空间，则 X 是 (K) 空间。

(ii) X^* 是 (K) 空间，则 X 是 (K^*) 空间。

证明　(i) 设 X 不是 (K) 空间，则存在 $x\in S(X)$，使恒等映射 $I:(X,W)\longrightarrow(X,\|\cdot\|)$ 在 x 点不连续，取 $f\in S(X^*)$，满足 $f(x)=1$，于是 $x\in A_f$，而且，$I:(U(X^{**}),W)\longrightarrow(U(X^{**}),\|\cdot\|)$ 在 Jx 点不连续，这与假设矛盾，所以 X 是 (K) 空间。

(ii) 若 X 不是 (K^*) 空间，则存在 $x\in S(X)$，$f\in A_x$，使 $f\,\overline{\in}\,PC(U(X^*))$，根据假设，这是不可能的，故 X 是 (K^*) 空间。

由于一致凸空间是 (G) 空间[2]，而且 $x\in S(X)$ 是 $U(X)$ 的可凹点的充要条件是 x 是 $U(X)$ 的端点及 PC 点，故有下述推论。

推论1　若 X 是一致光滑空间，则 X 既是 (G^*) 空间又是 (K^*) 空间。

所以 l_p，$L_p[0,1]$ 均是 (G^*) 空间和 (K^*) 空间。

推论2　X 是Banach空间，则 X 是 (G^*) 空间的充要条件是 X 是光滑的 K^* 空间。

推论3　若 X 是自反Banach空间，则

(i) X 为 (G) 空间的充要条件是 X^* 是 (G^*) 空间。

(ii) X 为 (G^*) 空间的充要条件是 X^* 是 (G) 空间。

(iii) X 为 (K) 空间的充要条件是 X^* 是 (K^*) 空间。

(iv) X 为 (K^*) 空间的充要条件是 X^* 是 (K) 空间。

3 关于光滑性的结果

我们知道，X是强光滑空间的充要条件是$\forall x\in S(X)$，$f\in A_x$是$U(X^*)$以Jx为强 暴露泛函的强暴露点[4]。定理3，4，5说明类似的结果对空间其它光滑性也成立。

定理3 Banach空间X是一致光滑的充要条件是$\bigcup\limits_{x\in S(X)} A_x$是$S(X^*)$的一致暴露点集。即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$|f(x)-1|<\delta$时 有

$$\|f-f_x\|<\varepsilon,\ \forall f\in S(X^*);\ x\in S(X);\ f_x\in A_x$$

证明 充分性 设$\|x-y\|<\delta$，则

$|1-f_y(x)|=(y-x,f_y)<\delta$，所以$\|f_x-f_y\|<\varepsilon$，其中$f_x\in A_y$，$f_y\in A_y$即$X$是一致光滑的。

必要性 若 $\bigcup\limits_{x\in S(X)} A(x)$ 不是$S(X^*)$的一致强暴露点集，则存在$\varepsilon>0$，$x_n\in S(X)$ $f_n\in S(X^*)$及$f_{x_n}\in A_{x_n}$ 使$|f_n(x_n)-1|<\frac{1}{n}$ 而$\|f_n-f_{x_n}\|>3\varepsilon$，设$y_n\in S(X)$ 满足 $|f_n(y_n)-f_{x_n}(y_n)|>2\varepsilon$ 则

$$\begin{aligned}
f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n) &\leqslant (f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))\left[\frac{1}{\varepsilon}(f_n(y_n)-f_{x_n}(y_n)-1\right] \\
&=(f_n(x_n)-f_{x_n}(x_n))+\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n) \\
&\quad -f_n(x_n))(f_n(y_n)-f_{x_n}(y_n)) \\
&=(f_n-f_{x_n})(x_n+\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n) \\
&=f_n(x_n+\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n) \\
&\quad -f_{x_n}(x_n)-f_{x_n}\left(\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n\right) \\
&\leqslant\|x_n+\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n\|-\|x_n\| \\
&\quad -f_{x_n}\left(\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n\right) \\
&=\|x_n+z_n\|-\|x_n\|-f_{x_n}(z_n).
\end{aligned}$$

其中 $z_n=\frac{1}{\varepsilon}(f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n))y_n\longrightarrow 0$。而空间$X$是一致光滑的，于是

$$\varepsilon=\frac{f_{x_n}(x_n)-f_n(x_n)}{\|z_n\|}\leqslant\frac{\|x_n+z_n\|-\|x_n\|-f_{x_n}(z_n)}{\|z_n\|}\rightarrow 0$$

与$\varepsilon>0$矛盾，所以必要性成立。

同理有

定理 4　Banach空间X是非常光滑的充要条件是$\forall x\in S(X)$，$f\in A_x$是$U(X^*)$以Jx为暴露泛函的弱—强暴露点。

定理 5　Banach空间X是光滑的充要条件是$\forall x\in S(X)$，$f\in A_x$是$U(X^*)$以Jx为暴露泛函的弱*—强暴露点。

与上述定理对称，有下面结果。

定理 6　设X^*可分，$x\in S(X)$是$U(X)$的一个弱—强暴露点，则f_x是$U(X^*)$的一个光滑点，其中$f_x\in A_x$是x的暴露泛函。

证明　设$F\in S(X^{**})$，$F(f_x)=1$，则存在$x_n\in X$使$Jx_n\xrightarrow{w^*}F$，于是$f_x(x_n)\longrightarrow f_x(x)$ $x_n\xrightarrow{w^*}x$，$Jx=F$，故f_x是光滑点。

定理 7　若$x\in S(X)$是$U(X)$的非常光滑点，$f_x\in A_x$是$U(X^*)$的PC点，则f_x是$U(X^*)$的强暴露点，所以X是(K^*)空间时，X是非常光滑空间等价于X是强光滑空间。

证明　由x是光滑点得f_x是$U(X^*)$的暴露点，且$Jx(f_x)>Jx(U(X^*)\setminus\{f_x\})$，设$f_n\in U(X^*)$，$Jx(f_n)\longrightarrow Jx(f_x)=1$，则$f_n(x)\longrightarrow 1$，由定理4 $f_n\xrightarrow{w}f_x$，而f_x是PC点，所以$f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f_x$，$f_x$是$U(X^*)$的强暴露点。

参 考 文 献

1 Lin Borluh, Lin Peikee, Troyanski S L. Proc Amer Math Soc, 1988 102: 526～528

2 Fun K, Glicksberg I. Duke math J, 1958, 25: 553～568

3 Lin Borluh, Lin Peikee, Troyanaki S L. Math Ann 1986, 274: 613～616

4 Diestel J. Geometry of Banach spaces: Selected topics, Lecture Notes in Math. Springer Verlag, 1975: 485

Dual Characterizations of Some Geometric Properties of Normed Space

*Han Jingluan** *Li Yongjin*

Abstract The (G*) (resp. (K*)) normed space is defined. It is shown that if X* is a (G*) (resp. (G) (K*) (K)) space then X is a (G) (resp. (G*) (K) (K*)) space. Some unified dual characterizations of various types of smoothness in a Banach space are given by using various types of exposed points.

Keywords denting point, PC point, (G) space, (K) space, exposed point

* Department of Mathematics, Zhongshan University