第32卷 第3期 中山大学学报(自然科学版) Vol.32 №.3
1993年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1993

Hermite 矩阵乘积的特征值不等式

黎 罗 罗

(中山大学计算机科学系)

摘 要 设A、B为n阶Hermite矩阵，本文就A半正定和A、B可交换两种情况给出乘积AB的若干个特征值的和的一系列上、下界。

关键词 Hermite矩阵，特征值，不等式

1 引 言

以H_n记n阶Hermite 矩阵的集合，$\lambda_i(\cdot)$ 记矩阵$(\cdot)$降序排列的第i个特征值，如果这个矩阵的特征值全是实数的话。设A、$B\epsilon H_n$，易知(参考引理2)当$A\geqslant 0$(半正定)或$AB=BA$(A、B可交换)时，乘积AB的特征值就全是实数。有如下经典结果：设A、$B\epsilon H_n$，且A、$B\geqslant 0$，则对$k=1,2,\cdots,n$ 成立

$$\sum_1^k\lambda_t(A)\lambda_{n-t+1}(B)\leqslant\sum_1^k\lambda_t(AB)\leqslant\sum_1^k\lambda_t(A)\lambda_t(B) \tag{1}$$

见文[1]。$\sum_1^k$表示指标t自1，2，…到k的求和。又设$i_1,i_2,\cdots,i_k$为满足$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$的任一组自然数。文[2]、[3]对(1)给出如下改进：设A、$B\epsilon H_n$且A、$B\geqslant 0$，则对$k=1,2,\cdots,n$成立

$$\sum_1^k\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)\leqslant\sum_1^k\lambda_{i_t}(AB)\leqslant\sum_1^k\lambda_{i_t}(A)\lambda_t(B) \tag{2}$$

及

$$\sum_1^k\lambda_t(AB)\geqslant\sum_1^k\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-i_t+1}(B) \tag{3}$$

文[4]在A、$B\epsilon H_n$且仅设$A\geqslant 0$的条件下得到

$$\sum_1^k\lambda_{n-t+1}(AB)\leqslant\sum_1^k\lambda_t(A)\lambda_t(B) \tag{4}$$

$$\sum_1^k\lambda_t(AB)\geqslant\sum_1^k\lambda_t(A)\lambda_{n-t+1}(B) \tag{5}$$

本文旨在继续上述工作，给出A、$B\epsilon H_n$ 且$A\geqslant 0$或$AB=BA$ 两种情况下有关的一系列不等式。先引入

引理1[5] 设A、$B\epsilon H_n$，则对$k=1,2,\cdots,n$成立

$$\sum_1^k(\lambda_{i_t}(A)+\lambda_{n-t+1}(B))\leqslant\sum_1^k\lambda_{i_t}(A+B)\leqslant\sum_1^k(\lambda_{i_t}(A)+\lambda_t(B)) \tag{6}$$

本文1991年2月25日收到，修改稿于1992年12月26日收到

引理2　设A、$B\in H_n$，又设实数$r\geqslant 0$、若$A\geqslant 0$则对$k=1,2,\cdots,n$成立

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^k\lambda_{i_t}(AB)+r\sum\lambda_{n-t+1}(A)\\ \sum_1^k\lambda_{n-t+1}(AB)+r\sum_1^k\lambda_{i_t}(A)\end{array}\right\}\leqslant\sum_1^k\lambda_{i_t}(AB+rA) \tag{7}$$

及

$$\sum_1^k\lambda_{i_t}(AB+rA)\leqslant\left\{\begin{array}{l}\sum_1^k\lambda_{i_t}(AB)+r\sum_1^k\lambda_t(A)\\ \sum_1^k\lambda_t(AB)+r\sum_1^k\lambda_{i_t}(A)\end{array}\right.$$

证明　注意$\lambda_t(AB+rA)=\lambda_t(A^{1/2}BA^{1/2}+rA)$，而$A^{1/2}BA^{1/2}$及$rA\in H_n$。用引理1即可证得引理2

2　A、$B\in H_n$且$A\geqslant 0$时的特征值不等式

记$(x)_+=\max\{x,0\}$，为行文简洁，用$\sum$记$\sum_1^k$又记$\beta=(\lambda_1(B))_+$，$\beta'=(-\lambda_n(B))_+$，设A、$B\in H_n$且$A\geqslant 0$，则对$k=1,2,\cdots,n$　成立定理1～3。

定理1

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B) \tag{8}$$

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A)) \tag{9}$$

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\geqslant\sum\lambda_{n-i_t+1}(A)\lambda_{n-k+t}(B)-\beta\sum(\lambda_{n-i_t+1}(A)-\lambda_{n-t+1}(A)) \tag{10}$$

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-i_t+1}(B)-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A)) \tag{11}$$

定理2

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_t(B)+\beta'\sum(\lambda_{i_t}(A)-\lambda_{n-t+1}(A)) \tag{12}$$

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\leqslant\sum\lambda_{n-i_t+1}(A)\lambda_{k-t+1}(B)+\beta\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{n-i_t+1}(A)) \tag{13}$$

定理3

$$\sum\lambda_{n-t+1}(AB)\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_t(B) \tag{14}$$

$$\sum\lambda_{n-t+1}(AB)\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{i_t}(B)+\beta\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A)) \tag{15}$$

不等式（8）、（14）改进了（5）及（4）。不等式（8）、（9），（11）、（12）互不蕴含，参看本文的例子与注记。

定理的证明　注意$B+\beta'I\geqslant 0$，对半正定矩阵A及$B+\beta'I$用（2）式左端不等式得

$$\begin{aligned}\sum\lambda_{i_t}(A(B+\beta'I))&\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B+\beta'I)\\&=\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)+\beta'\sum\lambda_{i_t}(A)\end{aligned} \tag{16}$$

又由引理2

$$\sum\lambda_{i_t}[A(B+\beta' I)]\leqslant\begin{cases}\sum\lambda_t(AB)+\beta'\sum\lambda_{i_t}(A)\\ \sum\lambda_{i_t}(AB)+\beta'\sum\lambda_t(A)\end{cases}\qquad(17)$$

（17）、（16）结合，得到（8）。

对A及$B+\beta' I$用式（3），得

$$\sum\lambda_t(A(B+\beta' I))\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-i_t+1}(B)+\beta'\sum\lambda_{i_t}(A)\qquad(18)$$

又由引理2

$$\sum\lambda_t(A(B+\beta' I))\leqslant\sum\lambda_t(AB)+\beta'\sum\lambda_t(A)\qquad(19)$$

结合（18）与（19）可得（11）。

类似地，由（2）右端的不等式及引理2分别得到

$$\sum\lambda_{i_t}(A(B+\beta' I))\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_t(B)+\beta'\sum\lambda_{i_t}(A)\qquad(20)$$

及

$$\sum\lambda_{i_t}(A(B+\beta' I))\geqslant\sum\lambda_{i_t}(AB)+\beta'\sum\lambda_{n-t+1}(A)\qquad(21)$$

结合（20）与（21）即得（12）。

在（8）中用$-B$代替B，注意$\lambda_t(-X)=-\lambda_{n-t+1}(X)$，得

$$\sum[-\lambda_{n-t+1}(AB)]\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)[-\lambda_{n-t+1}(B)]$$

由上式即得（14）

同法，在已证得的（11）中用$-B$代替B，得(15)。由引理2结合(2)式可证得(9)。在(9)中先用$-B$代替B，再用$n-i_k+1<\cdots<n-i_1+1$代替$i_1<\cdots<i_k$可得(13)。同法可由(12)导得(10)。定理1～3证毕。

3　A、$B\in H_n$，A、B可交换时的特征值不等式

记$\alpha_1=(\lambda_1(A))_+$，$\alpha'=(-\lambda_n(A))_+$，$\beta=(\lambda_1(B))_+$，$\beta'=(-\lambda_n(B))_+$，若$A$、$B\in H_n$且$AB=BA$，则对$k=1,2,\cdots,n$成立定理4。

定理4

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)-\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-t+1}(B))\qquad(22)$$

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)-\alpha'\sum(\lambda_{i_t}(B)-\lambda_{n-t+1}(B))-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A))\qquad(23)$$

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)-\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-t+1}(B))-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A))\qquad(24)$$

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\geqslant\sum\lambda_{n-i_t+1}(A)\lambda_{n-k+t}(B)-\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-k+t}(B))-\beta\sum(\lambda_{n-i_t+1}(A)-\lambda_{n-t+1}(A))\qquad(25)$$

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{n-i_t+1}(A)\lambda_{n-k+t}(B)-\alpha'\sum(\lambda_{i_t}(B)-\lambda_{n-k+t}(B))-\beta\sum(\lambda_{n-i_t+1}(A)-\lambda_{n-t+1}(A))\qquad(26)$$

$$\sum\lambda_t(AB)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-i_t+1}(B)$$
$$-\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-i_t+1}(B))-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A))\quad(27)$$

证明　注意$A+\alpha'I\geqslant0$，用(8)可得

$$\sum\lambda_t((A+\alpha'I)B)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)+\alpha'\sum\lambda_{n-t+1}(B)\quad(28)$$

另方面，由A、B可交换，$AB\epsilon H_n$，用引理1

$$\sum\lambda_t((A+\alpha'I)B)\leqslant\sum\lambda_t(AB)+\alpha'\sum\lambda_t(B)\quad(29)$$

结合(28)、(29)得(22)。用(9)得

$$\sum\lambda_{i_t}((A+\alpha'I)B)\geqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_{n-t+1}(B)+\alpha'\sum\lambda_{n-t+1}(B)$$
$$-\beta'\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A))\quad(30)$$

另方面，由引理1

$$\sum\lambda_{i_t}((A+\alpha'I)B)\leqslant\begin{cases}\sum\lambda_t(AB)+\alpha'\sum\lambda_{i_t}(B) & (31)\\ \sum\lambda_{i_t}(AB)+\alpha'\sum\lambda_t(B) & (32)\end{cases}$$

(31)和(32)与(30)结合分别可得(23)、(24)。

类似地，用(10)及引理1（仿照由(30)～(32)导出(23)、(24)的过程）可导出(25)及(26)。

最后，对$A+\alpha'I$及B用(11)式，结合引理1，可导得(27)。定理4证毕。

定理4给出AB的若干个特征值的和的下界.在(22)～(27)中用$-B$代替B，可分别导出$\sum\lambda_{n-t+1}(AB)$（AB的最小的k个特征值之和）及$\sum\lambda_{i_t}(AB)$（AB的某k个特征值之和）的上界。篇幅关系，仅以一例示之，在(24)中用$-B$代替B可得

$$\sum\lambda_{n-i_t+1}(AB)\leqslant\sum\lambda_{i_t}(A)\lambda_t(B)+\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-t+1}(B))$$
$$+\beta\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{i_t}(A))$$

再在上式中用i_t代替$n-i_t+1$，得上界

$$\sum\lambda_{i_t}(AB)\leqslant\sum\lambda_{n-i_t+1}(A)\lambda_{k-t+1}(B)+\alpha'\sum(\lambda_t(B)-\lambda_{n-t+1}(B))$$
$$+\beta\sum(\lambda_t(A)-\lambda_{n-i_t+1}(A))$$

推导中注意$i_1<i_2<\cdots<i_k$而$n-i_1+1>n-i_2+1>\cdots>n-i_k+1$。

4　例子与注记

定理1～3中，式(8)、(9)、(11)及(12)互不蕴含。

例1　设$A=\mathrm{diag}(2,2,1)$，$B=\mathrm{diag}(-1,0,1)$。对于$\lambda_1(AB)$，(8)提供的最佳的下界（取$i_1=3$）是-1，而(11)提供的最佳下界（取$i_1=2$或$i_1=3$)是0，可见(8)不优于(11)；又若设$A=\mathrm{diag}(2,1,0)$，$B=\mathrm{diag}(-1,0,1)$，估计$\lambda_1(AB)$的下界，(11)提供的最佳值为（取$i_1=2$）-1，而(8)提供的最佳值（取$i_1=3$)是0，可见(11)不优于(8)，二者互不蕴含。

例2 设$A=\mathrm{diag}(2,2,1)$，$B=\mathrm{diag}(-1,0,1)$，用(9)估计$\lambda_1(AB)$的下界(这时$k=1,i_1=1$)为-2，用(10)（它与(12)等价）估计的下界为-1；用(9)式估计$\lambda_2(AB)$（这时$k=1,i_1=2$）的下界为-2，用(10)式估计的下界为-3。可见(9)与(10)互不蕴含。

定理4中的各式也互不蕴含。仅以(22)、(23)为例。

例3 设$A=\mathrm{diag}(2,0,-1)$，$B=\mathrm{diag}(-1,0,1)$，估计$\lambda_1(AB)$的下界。用(22)得到的最佳值（取$i_1=3$)为-1，用(23)式得到的最佳值（取$i_1=3$)为-2，可见(23)不优于(22)。又设$A=\mathrm{diag}(0,0,-1)$，$B=\mathrm{diag}(-1,0,1)$，考虑$\lambda_1(AB)$的下界，用(22)得到的最佳下界（取$i_1=3$)是-1，而用(23)得到最佳下界（取$i_1=3$)是0，可见(22)不优于(23)。二者互不蕴含。

在本文(8)中令$i_t=t$，即可知经典结果(1)左式即使在仅设$A\geqslant 0$时也成立。但其右式在仅设$A\geqslant 0$时一般而言不成立。

参考文献

1 Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Academic,New York,1979.247

2 王伯英等. 北京师范大学学报（自然科学版），1987(3): 1～4

3 Boying Wang,Fuzheng Zhang. Linear Algebra Appl,1992,160: 113～118

4 Komaroff N. Linear Algebra Appl,1990,140:155～161

5 李乔. 矩阵论八讲. 上海: 上海科技出版社，1988.65

On Eigenvalue Inequalities of Hermitian Matrix Product

Li Luoluo

Abstract Let A、B be Hermitian matrices of order n. In cases of (1) $A\geqslant 0$, (2) $AB=BA$ respectively, we present upper and lower bounds for summation of eigenvalues of the product AB.

Keywords Hermitian matrix, eigenvalue, inequality

• Department of Computer Science, Zhongshan University