

混合试探作用量对四维格点 规范场的研究*

刘金明 黄超生 郭硕鸿

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘要 本文应用混合作用量作为改进平均场理论的试探作用量, 用变分法计算了4维时空中 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 纯格点规范场的平均元格内能 E_p . 对于 $Z(2)$ 格点规范场得出具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图. 对于 $U(1)$ 群, 得到很陡的 E_p - β 曲线, 显示有解除禁闭的二级相变. 对于 $SU(2)$ 群, 得到光滑的 E_p - β 曲线, 显示理论的禁闭性. 计算结果与 MC 方法所得符合较好.

关键词 格点规范理论, 规范场相图, 混合试探作用量

分类号 O412.3, O413.3, O572.243

文献[1]应用混合试探作用量作为改进平均场理论的试探作用量, 用变分法计算了3维时空中 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 纯格点规范场的平均元格能量 E_p - β 曲线与 MC 方法所得符合较好, 消除了平均场理论^[2,3]、变分-累积展开^[4]等解析方法所得 E_p - β 曲线在过渡区中存在的不正确间断点. 对于 $Z(2)$ 群, 还得到了其他解析方法得不到的具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图. 本文将此法推广到4维情况. 求出 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 纯格点规范场的 E_p - β 曲线. 对于 $Z(2)$ 群, 同样得到了具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图, 对于 $U(1)$ 群, 得到很陡的过渡, 显示有解除禁闭的二级相变. 对于 $SU(2)$ 群, 得到光滑的 E_p - β 曲线, 显示理论的禁闭性. 所有的计算结果与 MC 方法^[5~8] 所得符合较好, 并且改进了文献[9]的结果.

1 混合作用量与变分法

格点规范场的配分函数为

$$Z = e^{-W} = \int DU_l e^S, \quad DU_l \equiv \prod_l dU_l \quad (1)$$

式中, W 为自由能, U_l 为链 l 上的群元素, 叫链变量. S 为规范场的 Wilson 作用量.

收稿日期: 1992-08-31

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术中心基金资助项目

$$S = \frac{\beta}{2N} \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger), \quad \beta = 2N/g^2 \quad (2)$$

式中, U_p 为元格 P 上 4 个链变量的乘积叫元格变量, 引入试探作用量 $S_0(z)$, z 为变分参数, 令

$$Z_0 = \int \mathcal{D}U' e^{S_0} \quad (3)$$

利用凸性不等式, 得

$$W \leq W_{\text{eff}}, \quad W_{\text{eff}} = -\ln Z_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 \quad (4)$$

W_{eff} 叫做等效自由能, 对 z 变分, 使 W_{eff} 极小以确定参数 z 的值, 由此得自由能 W 的近似值. 显然, 试探作用量选得好就可得较好的自由能近似值. 通常文献中采用独立链试探作用量 S_0

$$S_0 = \frac{z}{2N} \sum_l \text{tr}(U_l + U_l^\dagger) \quad (5)$$

相应的等效自由能为

$$W_0 \equiv W_{\text{eff}}[S_0] = -N_l (\ln Z_0 - zm) - N_p \beta m^4 \quad (6)$$

式中 N_l 为总链数, N_p 为总元格数, Z_0 为规范群的单链积分

$$Z_0 = \int \mathcal{D}U e^{\frac{z}{2N} \text{tr}(U_l + U_l^\dagger)} \quad (7)$$

$$\text{而} \quad m = \left\langle \frac{1}{2N} \text{tr}(U_l + U_l^\dagger) \right\rangle_0 = Z'_0(z) / Z_0(z) \quad (8)$$

对 z 变分使 W_0 极小确定参数 z 以后, 所得 $E_p - \beta$ 曲线, 在过渡区都有间断点, 因而给出对任何规范群都有一级相变的不正确结论. 对此, 已有许多改进的理论, 但只要采用独立链试探作用量 S_0 , 过渡区的间断点都难以完全消除. 文献 [1] 和 [9] 指出利用群积分测度的不变性, 可以将 S_0 中的部分链变量改回元格变量使等效自由能更低, 从而得到更好的近似. 文献 [1] 中对 3 维时空讨论了将链变量改回元格变量的具体方案: 在格点中取 $2M$ 层扩展立体作为内部, 将不含内部链的所有其他元格称为外部. 在内部链中, 按文献 [1] 中方法取出特殊链 U'_a , 并将它们改回相应的元格变量, 那末这就是使最多的链变量改回元格变量的方法, 最后令外部的作用量改回相应的 Wilson 作用量, 使本法中的混合试探作用量为

$$S_{2M} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{N_{ia}} \text{tr}(U'_a + U'^{\dagger}_a) + \frac{\beta}{2N} \sum_{p=1}^{N_{pe}} \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) \quad (9)$$

式中, $N_{ia} = (4M+1)N_1N_2$ 为特殊链总数, N_1, N_2 分别为 x, y 方向上总格点数, $N_{pe} = N_p - (6M+5)N_1N_2$ 为外部元格总数, N_p 为总元格数. 由 (9) 式可得相应的等效自由能

$$W_{2M} = -\ln Z_E - N_1N_2(4M+1)(\ln Z_0 - zm) - N_1N_2\beta [(4M+1)m + 2m^5 + \dots + 2m^{4M+1}] \quad (10)$$

将 W_{2M} 对 m 变分, 由 $\partial W_{2M} / \partial m = 0$, 可得变分参数 z 与 β 的关系, 代进序参数 E_p 的公式

$$E_p = 1 - m(z) \quad (11)$$

便可求得 $E_p - \beta$ 曲线. 文献 [1] 只讨论了 3 维时空的 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 格点规范场的相图. 以下将此推广到 4 维时空情况.

2 4 维时空情况

在 4 维时空中，称所有类空元格为底面，类时元格为侧面，设在 3 维空间中已经按文献〔1〕所述选好 $2M_3$ 层扩展立体及相应的特殊链，在 $\pm x_4$ 方向上，重复画出这个 $2M_3$ 层扩展立体，组成新的内部超立体，并取在 $\pm x_4$ 处 3 维 $2M_3$ 层扩展立体的所有链为新的超立体的特殊链，取相邻的内部侧面元格为相应的特殊元格，内部的其他链叫空链，不含内部链的所有元格为外部元格。当我们令所有特殊链变回相应的特殊元格后，所有的内部元格或者是特殊元格，或者是空位元格（单空位，双空位，…， k 空位）。没有多余的元格变量，所以在试探作用量中，不再需要其他的链变量。作为例子，图 1 画出 $M_1 = M_3 = 1$ ，即 2×2 超立体，相应的混合试探作用量记为 $S_{2 \times 2}$ 。若在 $\pm 2x_4$ 处再重复取出 $2M_3$ 层扩展立体加入新的超立体，并形成新的 $4 \times 2M_3$ 层超立体为内部超立体。继续在 $\pm 3x_4, \pm 4x_4, \dots$ 上加层可组成内部 $2M_1 \times 2M_3$ 层超立体。选新加上的 $2M_3$ 层扩展立体的所有链为特殊链相邻的内部侧面元格为特殊元格。如上所述，在内部中只取特殊链，并准备将它们变回特殊元格变量，而外部元格部分取回 Wilson 作用量，于是得混合试探作用量 $S_{2M_1 \times 2M_3}$ 为

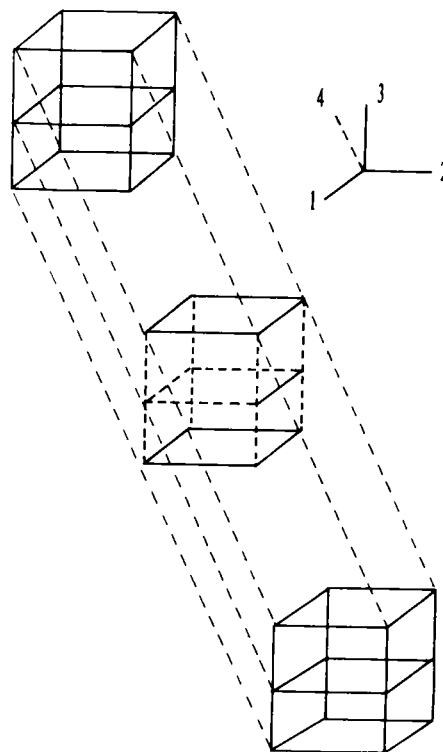


图 1 2×2 超立体中特殊链的取法，粗线代表特殊链
 Fig. 1 Special links in 2×2 supercube,
 Solidline represent special links

$$S_{2M_1 \times 2M_3} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{N_{ia}} \text{tr}(U_a^- + U_a^+) + \frac{\beta}{2N} \sum_{p=1}^{N_{pE}} \text{tr}(U_p^- + U_p^+) \quad (12)$$

式中 N_{ia} 为特殊链总数， N_{pE} 为外部元格总数。分别为

$$N_{ia} = (12M_3M_1 + 4M_3 + 4M_1 + 1) N_1 N_2 \quad (13a)$$

$$N_{pE} = N_p - N_{pa} - \sum_{k=1}^{M_3+M_1} N_{pbk} \quad (13b)$$

$N_{pa} = N_{ia}$ 为特殊元格总数， N_{pbk} 为 k 空位元格总数。不难计算其值为：

当 $M_1 < M_3$ 时,

$$\frac{N_{pkk}}{N_1 N_2} = \begin{cases} 8M_3 + 4k, & \text{当 } 1 \leq k \leq M_1 \\ 4M_1 + 2, & \text{当 } M_1 + 1 \leq k \leq M_3 \\ 4[M_3 + M_1 + 1 - k], & \text{当 } M_3 + 1 \leq k \leq M_3 + M_1 \end{cases} \quad (14)$$

当 $M_1 = M_3$ 时,

$$\frac{N_{pkk}}{N_1 N_2} = \begin{cases} 8M_3 + 4k, & 1 \leq k \leq M_3 \\ 4[2M_3 + 1 - k], & M_3 + 1 \leq k \leq M_3 + M_1 \end{cases} \quad (15)$$

当 $M_1 > M_3$ 时,

$$\frac{N_{pkk}}{N_1 N_2} = \begin{cases} 8M_3 + 4k, & 1 \leq k \leq M_3 \\ 12M_3 + 2, & M_3 + 1 \leq k \leq M_1 \\ 4[M_3 + M_1 + 1 - k], & M_1 + 1 \leq k \leq M_1 + M_3 \end{cases} \quad (16)$$

相应的等效自由能为

$$W_{2M_1 \times 2M_3} = -\ln Z_E - N_{ia}(\ln Z_0 - zm) - \beta[N_{ia}m + \sum_{k=1}^{M_3+M_1} N_{pkk}m^{4k+1}] \quad (17)$$

对 m 变分使 (17) 式极小得

$$z = \beta[1 + \sum_{k=1}^{M_3+M_1} \frac{N_{pkk}}{N_{ia}}(4k+1)m^{4k}] \quad (18)$$

只要 M_3 和 M_1 都不太大, (11) 式仍成立. 将 (18) 式与 (11) 式联立便得 4 维情况下的 $E_p - \beta$ 曲线.

在众多的试探作用量中, 我们取使 $W_{2M_1 \times 2M_3}$ 最小以确定 M_1 和 M_3 的值. 为此, 我们对 $\ln Z_E$ 采用单链近似, 得

$$W_{2M_1 \times 2M_3} \equiv W_{2M_1 \times 2M_3} / N_i \approx -(\ln Z_0 - zm) - \frac{3}{2}\beta m^4 \quad (19)$$

对 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 群, 在 $M_1 = 1, 2, \dots, 5$ 和 $M_3 = 1, 2, \dots, 5$ 计算 (19) 式, 取使 $W_{2M_1 \times 2M_3}$ 最低的 (M_1, M_3) 值, 结果为

4 维, $Z(2)$ 群和 $U(1)$ 群, 都是 $M_1 = 1, M_3 = 2$, 相应的 z 为

$$z = \beta \left(1 + \frac{100}{37}m^4 + \frac{54}{37}m^8 + \frac{52}{37}m^{12} \right) \quad (20)$$

4 维, $SU(2)$ 群, 得 $M_1 = 2, M_3 = 1$, 相应的 z 为

$$z = \beta \left(1 + \frac{60}{37}m^4 + \frac{126}{37}m^8 + \frac{52}{37}m^{12} \right) \quad (21)$$

由此得到的 $E_p - \beta$ 曲线如图 2 所示.

3 讨 论

本文将文献 [1] 发展的混合试探作用量推广到 4 维时空情况, 讨论了 $Z(2)$, $U(1)$ 和 $SU(2)$ 群纯格点规范场的内能曲线, 计算结果与 MC 计算相符. 特别是对于 4 维 $Z(2)$ 群, 得到具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图, 这是用其他试探作用量作解析计算得不到的结果. 对于 $U(1)$ 群得到很陡的 $E_p - \beta$ 曲线, 显示有解除禁闭的二级相变. 对于 $SU(2)$ 群, 得到光滑的 $E_p - \beta$ 曲线, 显示理论的禁闭性. 如同文献 [1] 一样,

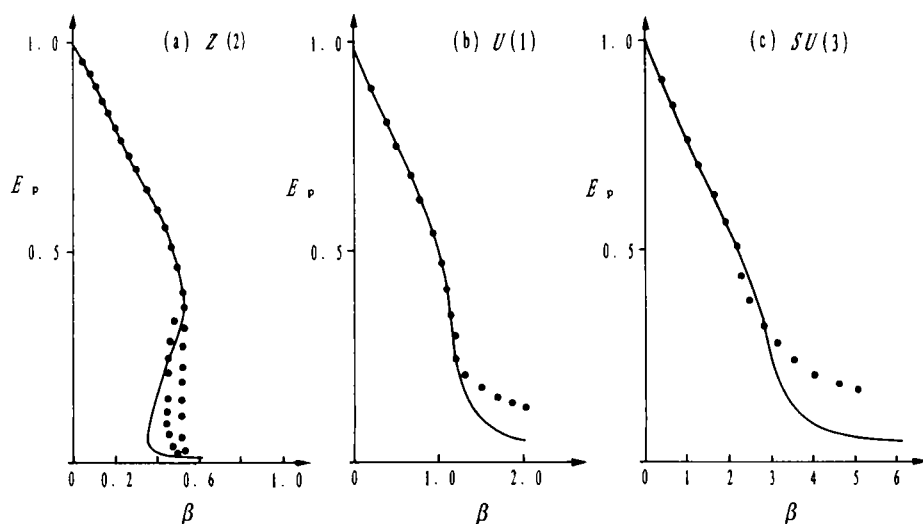


图2 4维格点规范场的相图

Fig. 2 Phase diagram of 4D lattice gauge theory

(a) $Z(2)$ 群, (b) $U(1)$ 群, (c) $SU(2)$ 群, 实线——为本文计算结果, 实心点···为MC计算结果

由于等效自由能不能准确计算, 本文在确定内部超立体的最佳层数不够准确, 而且划分内部与外部超立体时, 忽略了彼此间的耦合, 当 β 不大时, 这是较好的近似. 但当 β 很大时, 元格间的关联效应变大, 需要考虑其耦合. 计算表明4维情况所得结果比3维情况较接近MC计算结果. 这些问题我们正进一步研究.

参 考 文 献

- 1 刘金明, 黄超生, 郭硕鸿. 中山大学学报(自然科学版), 1993, 32(4): 44
- 2 Balian R, Drouffe J, Itzykson C. Phys Rev, 1974, D10: 3376; 1975, D11: 2089, 2104
- 3 Brezin E, Drouffe J. Nucl Phys, 1982, B200: 93
- 4 Zheng X T, Tan Z G, Wang J. Nucl Phys, 1987, B287: 171
- 5 Creutz M, Jacobs L, Rebbi C. Phys Rev, 1979, D20: 1915
- 6 Bhanot G, Creutz M. Phys Rev, 1980, D21: 2892
- 7 Lautrup B, Nauenberg M. Phys Rev Lett, 1980, 45: 1755
- 8 Creutz M. Phys Rev, 1980, D21: 2308
- 9 郭硕鸿, 刘金明, 陈启洲. 中山大学学报(自然科学版), 1984(4): 48
- Guo Shuohong, Chen Qizhou, Liu Jinming. Comm Theor Phys, 1983, 2: 1575

Phase Diagrams of Lattice Gauge in Four Dimensions Studied with Mixed Trial Action

*Liu Jinming * Huang Chaosheng Guo Shuohong*

Abstract Using mixed action as a trial to the modified mean field theory, we calculate the internal energies E_p of $Z(2)$, $U(1)$ and $SU(2)$ lattice gauge fields in 4-dimensions. Phase diagram of first order phase transition like Van derwaals curve is obtained for $Z(2)$ group, which cannot be obtained with any other trial actions. A very steep crossover in the E_p - β curve for 4-D $U(1)$ group shows the signal of 2nd order phase transition. The E_p - β curve for 4-D $SU(2)$ group is smooth showing only a single, confining phase. The results are in good agreement with the Monte Carlo results both in the strong-coupling region and crossover region.

Keywords lattice gauge theory, phase diagram, mixed trial action

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275