第32卷 第3期 1993年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 №.3 1993

一类二次系统的定性分析

王远世 朱思铭
（中山大学数学系）

摘 要 讨论了一类二次系统的定性性质，应用微分方程定性理论，得到了若干结果。

关键词 旋转向量场，奇点

本文研究了文〔1〕中的方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y+\delta x-\dfrac{3}{2}x^2-2xy+y^2 \triangleq F(x,y,\delta) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(1-x-2y) \triangleq G(x,y,\delta) \end{cases} \tag{1}$$

讨论了：非临界情形(1)的极限环的存在性及其全局性图貌；临界情形极限环的存在性及若分界线环存在，则其位置如何。本文工作改进了文〔1〕的结果。

1 方程(1)在$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$的定性性质

引理1 方程(1)当$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$时，只有两个有限远奇点$O(0,0)$，$A(0,1)$，其中，$O(0,0)$为不稳定焦点，$A(0,1)$为稳定焦点。

证略。

引理2 方程(1)对任意δ在无穷远处有唯一奇点，且该奇点为鞍点。

证明 作代换$x=\frac{1}{z}$，$y=\frac{u}{z}$，$dt=zd\tau$，将(1)变换为

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\tau} = z(uz-\delta z+\dfrac{3}{2}+2u-u^2) \triangleq F_1(u,z,\delta) \\ \dfrac{du}{d\tau} = z+u^2z-u\delta z-1-\dfrac{1}{2}u+2u^2-u^3 \triangleq G_1(u,z,\delta) \end{cases} \tag{2}$$

令 $f(u)=u^3-2u^2+\frac{1}{2}u+1=u(u-1)^2+1-\frac{1}{2}u$，则$f'(u)=0$ 的两根为

$$u_1=\frac{4-\sqrt{10}}{6},\qquad u_2=\frac{4+\sqrt{10}}{6}$$

由$f(-1)<0$，$f(-\frac{1}{2})>0$且$u<u_1$时，$f'(u)>0$知$f(u)$在$(-\infty, u_1)$有唯一根u_0，

本文1992年1月4日收到

且 $-1<u_0<-\frac{1}{2}$。

由 $u_1<u<u_2$ 时 $f(u)>0$，$u>u_2$ 时 $f'(u)>0$ 知 $f(u)$ 有唯一根 u_0。

又作代换 $x=\frac{v}{z}$，$y=\frac{1}{z}$，$dt=zd\tau$，将(1)变换为

$$\begin{cases}\frac{dz}{d\tau}=(-vz+v^2+2v)z\\ \frac{dv}{d\tau}=-v^2z-z+\delta vz+v^3-\frac{1}{2}v^2-2v+1\end{cases}$$

由 $v^3+\frac{1}{2}v^2-2v+1=0$ 无零根知沿 y 轴的无穷远处不是奇点。故(1)有唯一的无穷远奇点 $A_1(u_0,0)$。

由 $f(u_0)=0$ 知 $\det\frac{D(F_1,G_1)}{D(z,u)}\Big|_{A_1}<0$，故 A_1 为鞍点，证毕。

记无穷远奇点 A_1 的对径点为 A_1'，如图1。

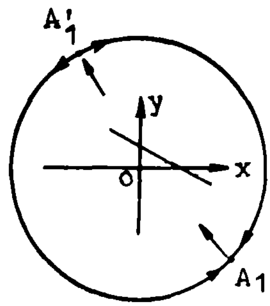

图1　无穷远奇点

Fig. 1 Singular point in unlimited place

引理3　对方程(1)，$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$ 时，过直线 l：$1-x-2y=0$ 下方的点的轨线，不可能当 $t\to+\infty$ 时趋于无穷远奇点 A_1'。

证明　设轨线 L_0 的方程为 $x=\overline{x}(t)$，$y=\overline{y}(t)$，其中 $(\overline{x}(t_0),\ \overline{y}(t_0))=(x_0,y_0)$，且 $y_0<\frac{1-x_0}{2}$。

$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$ 时，在直线 l 上有 $\frac{dy}{dt}=0$，$\frac{dx}{dt}<0$，故 L_0 不能穿过直线 l。若 L_0 当 $t\to+\infty$ 时趋于 A_1'，由于在第二象限恒有 $\overline{x}(t)<0$，$1-\overline{x}(t)-2\overline{y}(t)>0$，故 $\frac{d\bar{y}(t)}{dt}<0$，这与 L_0 趋于 A_1' 矛盾，证毕。

类似地，可得

引理4　对方程(1)，$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$ 时，过直线 l 上方的点的轨线，不可能当 $t\to-\infty$ 时趋于无穷远点 A_1。

定理1　$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$ 时，原点外围至少有一个稳定的极限环，且最外层的极限环外稳定，它随 δ 增大而扩大；最内层的极限环内稳定，它随 δ 减少而缩小。

证明　取 $M'(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4})\in l$，$\frac{dx}{dt}\Big|_{M'}<0$，$\frac{dy}{dt}\Big|_{M'}=0$ 故当 t 增加时，过 M' 的轨线 L' 必按顺序过负 x 轴，负 y 轴，正 x 轴上 $(0,1)$ 段，正 y 轴上 $(0,\frac{1}{2})$ 段，负 x 轴，如图2，则

$\widehat{B_1B_2}\cup\overline{B_1B_2}$构成一条外境界线。因0点不稳定，由环域原理[2]，极限环的存在性得证

又
$$\begin{vmatrix} F(x,y,\alpha_2), & G(x,y,\alpha_2) \\ F(x,y,\alpha_1), & G(x,y,\alpha_1) \end{vmatrix} = (\alpha_2-\alpha_1)x^2(1-x-2y) \quad (3)$$

当 $y<\frac{1-x}{2}$时，(3)式右端不小于0，由广义旋转向量场[3]知定理1得证。

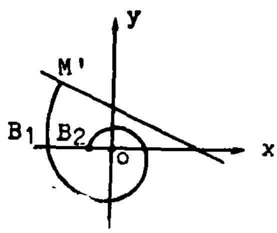

图2　外境界线1

Fig.2　Outside Line 1

定理2　对方程(1)，$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$时，$A$点外围至少有一个不稳定极限环，且最外层的极限环外不稳定，它随δ的减少而扩大；最内层的极限环内不稳定，它随δ的增大而缩小。

证明　因A_1为简单鞍点，有两条分界线在赤道上，它的另一分界线必由A_1出发，经正x轴上$(0,1)$段，正y轴上$(0,\frac{1}{2})$段，趋于0点附近的极限环。

设l与y轴交于点N，如图3。

A_1'的不在赤道上的分界线的负向必与$\overline{AN}$交于一点$C(0,y_c)$，$\frac{1}{2}<y_c<1$，记该分界线为L_c，则L_c的负向必与$\overline{AN}$交于另一点$C'(0,y_c')$，显然$y_{c'}>y_c$，故$\widehat{y_{c'}y_c}\cup\overline{y_cy_{c'}}$构成一外境界线。又由$A$为稳定焦点知，$A$外围至少有一个不稳定极限环，且最外层的是外不稳定，最内层的是内不稳定。

由式(3)及广义旋转向量场性质，知定理2得证。

画出$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$时(1)的全局定性图貌，如图4。

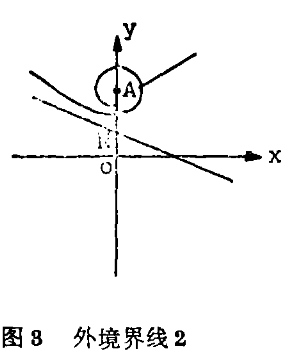

图3　外境界线2

Fig.3　Outside line 2

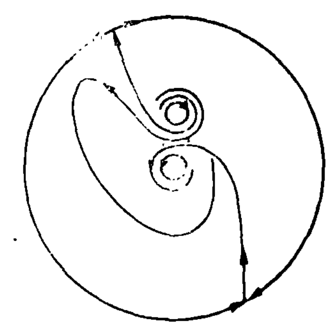

图4　$\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$时的定性图

Fig.4 Qualitative Fig. while $\frac{1}{2}<\delta<\frac{3}{2}$

2 方程(1)在$\delta=\frac{1}{2}$时的定性性质

记l上的奇点为$M(-1,1)$，有

引理 5 $\delta=\frac{1}{2}$时，M为鞍结点。

证明 对(1)作代换

$$\begin{cases}x=x_1+3y_1-1\\ y=-2x_1+2y_1+1\end{cases}$$

将(1)变为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0&0\\ 0&\frac{7}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1^2-3x_1y_1+\frac{5}{2}y_1^2\\ 2x_1^2-2x_1y_1-8y_1^2\end{pmatrix} \tag{4}$$

由(4)第二个方程求出 $y_1=-\frac{4}{7}x_1^2+0(|x_1|^2)$，且

$$\frac{1}{2}x_1^2+\frac{5}{2}y_1^2-3x_1y_1=\frac{1}{2}x_1^2+0(|x_1|^2),$$

故由文〔4〕知M为鞍结点，其定性图如图5。

定理 3 $\delta=\frac{1}{2}$时，若M的分界线构成分界线环L，则L不可能环绕原点，即只可能环绕A点。

证明 用反证法，参考图6。

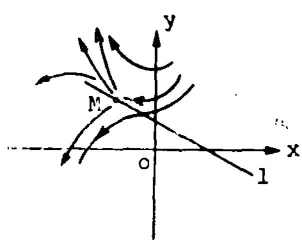

图5 M的定性图

Fig.5, Qualitative Fig. of M

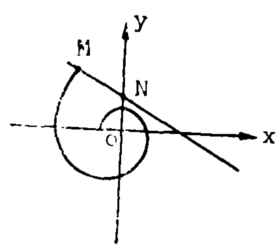

图6 $\delta=\frac{1}{2}$时的局部定性图

Fig.6 Local Qualitative Fig. white $\delta=\frac{1}{2}$

若L环绕原点，则L必经负x轴，负y轴，正x轴上(0,1)段，与正y轴相交，且落点必落在线段$\overline{ON}$上。

若L经过N点，由于在N处，$\frac{dy}{dt}=0$，$\frac{dx}{dt}<0$，而直线l在该处有$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$，故$L$不能在$N$处穿过直线$l$。若$L$经过$\overline{ON}$上其它点，易见$L$亦不能在通过$y$轴时穿过直线$l$。

又 $x<0$，$y<\frac{1-x}{2}$ 时，$\frac{dy}{dt}<0$，L 不能回到点 M，这与 L 为一分界线环矛盾。证毕。

定理 4　$\delta=\frac{1}{2}$ 时，原点外围至少有一个稳定的极限环，且最外层的极限环外稳定，最内层的极限环内稳定。

证略。

3　方程(1)在 $\delta=\frac{3}{2}$ 时的定性性质

类似于 $\delta=\frac{1}{2}$ 的情形，可证得下述结论。

引理 6　$\delta=\frac{3}{2}$ 时，方程(1)在直线 l 上出现奇点 $B(1,0)$，B 为一鞍结点。

定理 5　$\delta=\frac{3}{2}$ 时，若 B 的分界线构成分界线环 l，则 L 不可能环绕 A 点，即只可能环绕O点。

定理 6　$\frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant\frac{3}{2}$ 时，初值为 (x_0, y_0)，满足 $y_0<\frac{1-x_0}{2}$ 的所有正半轨线有界。

参考文献

1　叶彦谦．常微分方程与控制论．武汉：华中师范大学出版社，1988．57～69

2　Arnald V I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1983. 219～331

3　张芷芬等．微分方程定性理论．北京：科学出版社，1985．239～257

4　Andronov A A. Theory of Bifurcation of Dynamic Systems on a Plane. 1973

5　张锦炎．微分方程几何理论与分支问题．北京：北京大学出版社，1987．20～75

A Qualitative Study of a Quadratic System

*Wang Yuanshi**　*Zhu Siming*

Abstract We discuss a quadratic system. Using the qualitative theory in differential equations, some new results are derived.

Keywords rotational vectorfields, singular point

*Department of Mathematics, Zhongshan University