

# 混合试探作用量对三维格点规范场的研究\*

刘金明 黄超生 郭硕鸿

(中山大学物理学系)

**摘要** 应用混合元格变量—链变量作用量作为改进平均场理论的试探作用量,用变分法计算了3维时空中 $Z(2)$ ,  $U(1)$ 和 $SU(2)$ 纯格点规范场的平均元格内能 $E_p$ .对于 $Z(2)$ 格点规范场得出具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图.对于3维 $U(1)$ 和 $SU(2)$ 规范场,所得 $E_p \sim \beta$ 曲线是光滑的,显示理论的禁闭性.计算结果与MC计算结果符合较好.

**关键词** 格点规范理论,规范场相图,混合试探作用量

Monte Carlo方法成功地研究了各种规范群的相结构<sup>[1,2]</sup>.在解析计算方面,平均场方法<sup>[3]</sup>,变分法<sup>[3]</sup>,和变分累积展开方法<sup>[4,5]</sup>都被应用于研究格点规范场的相结构,并且不同程度地得到与MC方法相符的结果.但是,用MC方法得到的3维和4维 $Z(2)$ 群格点规范理论的相图中,都出现磁滞曲线型的一级相变.而应用文献[3~5]的解析计算只能得到间断点表示一级相变的存在.文献[6]指出应用混合链—元格变量作用量作为改进平均场近似的试探作用量,作变分计算,对于4维 $Z(2)$ 群和 $Z(3)$ 群格点规范理论得到了范德瓦尔斯型的相图,更好地表现理论的一级相变性质.但文献[6]没有考虑3维情形,对于4维 $U(1)$ 群的计算也不理想.本文用文献[6]的方法研究了 $Z(2)$ 、 $U(1)$ 和 $SU(2)$ 群格点规范场的相结构.对于3维 $U(1)$ 和 $SU(2)$ 群格点规范场所得 $E_p \sim \beta$ 曲线是光滑的,显示理论的禁闭性.计算结果与MC方法所得符合较好.

## 1 混合链变量、元格变量试探作用量

格点规范场的配分函数为

$$Z = e^{-W} = \int DU_l e^S, \quad DU_l \equiv \prod_l dU_l \quad (1)$$

式中, $W$ 为自由能, $U_l$ 为链 $l$ 上的群元素,叫链变量. $S$ 为规范场的Wilson作用量

$$S = \frac{\beta}{2N} \sum_P \text{tr}(U_P + U_P^*), \quad \beta = 2N/g^2 \quad (2)$$

本文1992年8月30日收到

\*国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心基金资助项目

式中,  $U_p$  为元格  $P$  上 4 个链变量的乘积叫元格变量. 引入试探作用量  $S_0(z)$ ,  $z$  为变分参数, 由自由能极小条件确定. 令

$$Z_0 = \int DU_l e^{S_0} \quad (3)$$

利用凸性不等式, 得

$$W \leq W_{eff}, \quad W_{eff} = -\ln Z_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 \quad (4)$$

最简单的平均场理论采用独立链试探作用量

$$S_0 = \frac{z}{2N} \sum_l t_r(U_l + U_l^+) \quad (5)$$

得

$$W_0 \equiv W_{eff}[S_0] = -N_l(\ln N_0 - zm) - N_p \beta m^4 \quad (6)$$

式中,  $N_l$  为总的链数,  $N_p$  为总的元格数.

$$Z_0 = \int dU e^{\frac{z}{2N} \sum_l t_r(U_l + U_l^+)} \quad (7)$$

$$m = \left\langle \frac{1}{2N} t_r(U_l + U_l^+) \right\rangle_0 = \frac{Z'_0(z)}{Z_0(z)} \quad (8)$$

对  $z$  变分使  $W_0$  极小, 得

$$z = 2(d-1)\beta m^3 \quad (9)$$

式中  $d$  为时空维数. 上式当  $\beta < \beta_c$  时给出  $m = 0$ , 而当  $\beta > \beta_c$  时,  $m \neq 0$ , 因而, 对任何规范群, 都给出在  $\beta_c$  有一级相变的不正确结论. 对简单的平均场理论已有许多改进的理论<sup>[3~6]</sup>. 本文采用文献[6]的做法, 利用群积分测度的不变性, 将  $S_0$  中部分链变量改为元格变量, 组成混合链变量、元格变量试探作用量  $S_{mix}$ . 它满足以下两个条件: ①可以严格计算. ②它给出的等效自由能比  $S_0$  所给出的更低. 因而能给出比简单平均场理论更好的结果.

作为混合作用量的例子, 先考虑  $2+1$  维情形, 如果在  $S_0$  中, 将某一个立方体内的 5 个链  $U_1, U_2, \dots, U_5$  改为元格变量  $U'_1, \dots, U'_5$ , 分别定义为

$$\left. \begin{aligned} U'_1 &= U_1 U_{10}^+ U_7^+ U_6, & U'_2 &= U_2 U_{12}^+ U_8^+ U_{10}, & U'_3 &= U_3 U_{12}^+ U_6^+ U_{11}, \\ U'_4 &= U_4 U_{11}^+ U_6^+ U_9, & U'_5 &= U_5 U_8^+ U_7^+ U_6 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

取混合试探作用量  $S_{mix}$  为

$$S_{mix} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^5 t_r(U'_a - U'^*_a) + \frac{z}{2N} \sum_{l \neq a} t_r(U_l + U_l^+) \quad (11)$$

用  $S_{mix}$  计算等效自由能(4)得

$$W_{mix} = W_{eff}[S_{mix}] = -N_l(\ln Z_0 - zm) - N_p \beta m^4 - \beta(5m + m^5 + 8m^7 + 2m^{10} - 16m^4) \quad (12)$$

式中最后一项来自  $\langle S \rangle_{mix}$  中与图1立方体有关的贡献. 为方便起见, 称此立方体的12个

链为内部链, 其中称 $U_1, U_2 \dots U_5$ 为特殊链,  $U_6, U_7 \dots U_{12}$ 为空链,  $U'_1, U'_2 \dots U'_5$ 为特殊元格,  $U_{Pb1} = U_1 U_2 U_3^+ U_4^+$ 叫单空位元格 因为作变换 $U_a \rightarrow U'_a, a = 1, 2, \dots, 5$ 之后,

$\langle S \rangle_{mix}$ 中含 $U_{Pb1}$ 的项的贡献为 $m^5$ , 而含 $U'_a$ 的贡献为 $m$ . 在此立方体之外, 含 $U_1, \dots, U_4$ 的元格共8个, 在 $\langle S \rangle_{mix}$ 中各贡献 $m^7$ , 含 $U_5$ 的元格有2个, 各贡献 $m^{10}$ . 不含内部链的元格为外部元格, 相应的链为外部链. 易见 $W_{mix} < W_0$ , 这里由于 $S_{mix}$ 中含有5个元格变量, 计入了这几个元格内链变量的耦合, 所以 $S_{mix}$ 比 $S_0$ 更接近原来的 $S$ .

其次, 考虑图2所示的相连的2个立方体, 称上面的类空元格为上底面, 中间的类空元格叫中心面, 下面的类空元格为下底面. 所有的类时元格叫侧面. 选上、下底面的链 $U_1, U_2 \dots U_5$ 为特殊链, 与它相邻的侧面 $U'_1, U'_2 \dots U'_5$ 为相应的特殊元格, 选中心元格的一个链 $U_6$ 为特殊链, 中心面为相应的特殊元格, 于是

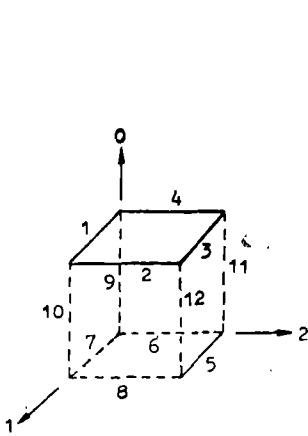


图1 一个立方体中特殊链的取法 (1~5为特殊链)  
Fig.1 Special links in a cube

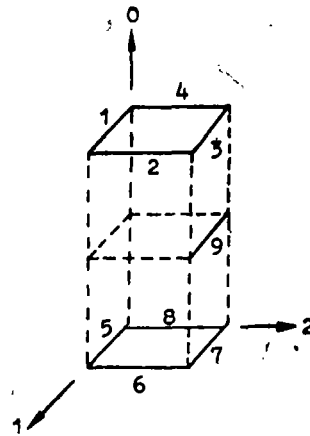


图2 两个相连立方体中特殊链的取法 (1~9是特殊链)  
Fig.2 Special links in a connective two cubes

$$S_{mix} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^5 \text{tr}(U'_a + U_a'^+) + \frac{z}{2N} \sum_{l=6}^{12} \text{tr}(U_l + U_l^+) \quad (13)$$

$$W_{mix} = -N_l(\ln Z_0 - zm) - (N_p - 28)\beta m^4 - \beta(9m + 2m^5 + 13m^7 + 4m^{10}) \quad (14)$$

易见这种试探作用量比在单个立方体取5个特殊链的混合作用量更接近原作用量 $S$ . 按这种方式, 我们可将这2个立方体沿 $x, y$ 方向扩充成2层立方体如图3所示, 选上、下

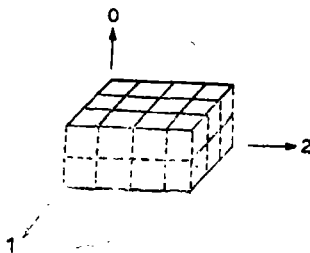


图3 两层立方体中特殊链的取法 (实线为特殊链)  
Fig.3 Special links in two layers of cubes

底面的所有链和中间面所有沿 $x$ 方向的链(最左边的一条边除外)为特殊链,并按上述2个相立方体的方式变换为特殊元格,于是

$$S_{\text{mix}} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{5N_1N_2} t_r(U'_a + U'_a{}^+) + \frac{z}{2N} \sum_{l=a} t_r(U_l + U_l{}^+) \quad (15)$$

式中特殊链的总数为 $N_{Ia} = 5N_1N_2$ ,  $N_1$ 和 $N_2$ 分别为沿 $x$ 和 $y$ 方向上格点的总数。我们注意到作变换 $U_a \rightarrow U'_a$ 以后,图3中两层立方体内部的元格变量都出现在混合试探作用量 $S_{\text{mix}}$ 中,所以没有必要再在 $S_{\text{mix}}$ 中保留空链的项,更进一步,我们可以取更简单的试探作用量 $S_{2,\text{mix}}$ ,其中链变量只取外部链,于是

$$S_{2,\text{mix}} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{5N_1N_2} t_r(U'_a + U'_a{}^+) + \frac{z}{2N} \sum_{l \in E} t_r(U_l + U_l{}^+) \quad (15')$$

由此得等效自由能为

$$W_{2,\text{mix}} = -N_I(\ln Z_0 - zm) - (N_P - 11N_1N_2)\beta m^4 + 5N_1N_2(\ln Z_0 - zm) - \beta N_1N_2(5m + 2m^5) \quad (16)$$

式中,下标2表示2层扩展立体, $E$ 表示外部, $(N_P - 11N_1N_2)$ 为外部元格总数。 $2N_1N_2$ 为单空位元格总数。由于在 $S_{2,\text{mix}}$ 中外部链与立方体的链变量已经脱耦,所以我们可以采用更有效的试探作用量,即将外部作用量换回原来的Wilson作用量,取

$$S_2 = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{5N_1N_2} t_r(U'_a + U'_a{}^+) + \frac{z}{2N} \sum_{P \in E} t_r(U_P + U_P{}^+) \quad (17)$$

$$W_2 = -\ln Z_E - 5N_1N_2(\ln Z_0 - zm) - \beta N_1N_2(5m + 2m^5) \quad (18)$$

式中

$$Z_E = \int DU_l e^{S_E}, \quad S_E = \frac{\beta}{2N} \sum_{P \in E} t_r(U_P + U_P{}^+) \quad (19)$$

分别为外部的配分函数和外部作用量。容易验证, $W_2$ 比 $W_0$ 小得多。

实际上,只要在图3的立方体上、下各加1层或2层或3层等,新加层的底面上的所有链为特殊链,并将相邻的内部侧面元格取作特殊元格,这样形成 $2M$ 层扩展立体作为内部,特殊链总数 $N_{Ia} = (4M+1)N_1N_2$ 。将不含内部链的所有其他元格称为外部,外部元格总数 $N_{PE} = N_P - (6M+5)N_1N_2$ 。取简化的混合试探作用量为

$$S_{2M} = \frac{z}{2N} \sum_{a=1}^{N_{Ia}} t_r(U'_a + U'_a{}^+) + \frac{\beta}{2N} \sum_{P=1}^{N_{PE}} t_r(U_P + U_P{}^+) \quad (20)$$

相应的等效自由能为

$$W_{2M} = -\ln Z_E - N_1N_2(4M+1)(\ln Z_0 - zm) - N_1N_2\beta[(4M+1)m + 2m^5 + \dots + 2m^{4M+1}] \quad (21)$$

上式最后一项是由于第一层底面上元格为(单)空位,贡献为 $m^5$ ,第二层底面上元格为双空位,贡献 $m^9$ ,...最高层底面上元格为 $M$ 空位,贡献为 $m^{4M+1}$ 。

将 $W_{2M}$ 对 $m$ 变分可得变分参数 $z$ 满足的关系为

$$z = \beta \left[ 1 + \frac{10}{4M+1} m^4 + \frac{18}{4M+1} m^8 + \dots + 2m^{4M} \right] \quad (22)$$

## 2 3 维情况的内能曲线

序参量为平均元格内能  $E_P$

$$E_P = \frac{1}{N_P} \left\langle \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2N} t_r(U_P + U_P^*) \right] \right\rangle = 1 - \left\langle \frac{1}{2N} t_r(U_P + U_P^*) \right\rangle = 1 - v \quad (23)$$

$$v \equiv \left\langle \frac{1}{2N} t_r(U_P + U_P^*) \right\rangle \quad (24)$$

考虑某一个简化试探作用量, 记为  $S_j$ , 由凸性不等式有

$$\ln Z \geq \ln Z_j + \langle S - S_j \rangle_j \quad (25)$$

$$\ln \langle Z \langle X \rangle \rangle \geq \ln Z_j + \langle S - S_j + \ln X \rangle_j \quad (26)$$

式中  $X$  为某一正定变量, 我们取

$$\ln X = \frac{\lambda}{2N} t_r(U_P + U_P^*) \quad (27)$$

则当  $\lambda$  充分小,  $S_j$  充分接近  $S$  时,  $v$  近似等于特殊元格在  $S_j$  中的平均值  $m$ , 即  $v = m$ , 于是

$$E_P = 1 - m \quad (28)$$

由(28)与(22)联立, 便可得理论的相图,  $E_P \sim \beta$  曲线。

由(20)式可见, 简化试探作用量  $S_j = S_{2M}$ , 仍有多种选择, 我们取  $W_{2M}$  最小来确定内部立体的层数  $2M$ 。由于外部配分函数  $Z_E$  不能准确计算, 所以, 对外部配分函数采用单链近似

$$-\ln Z_E \simeq -N_{IE} (\ln Z_0 - zm) - N_{PE} \beta m^4 \quad (29)$$

式中,  $N_{IE} = N_I - (6M+4)N_1N_2$  为外部链的总数, 于是

$$w_{2M} \equiv \frac{W_{2M}}{N_I} \simeq -\ln Z_0 - zm - \beta m^4 \quad (30)$$

用数值计算  $Z(2)$ ,  $U(1)$  和  $SU(2)$  在  $M=1$  到 15 时, 使  $W_{2M}$  最低的  $M$  值, 计算结果为

3 维,  $Z(2)$  群,  $M=2$ ,

$$z = \beta \left( 1 + \frac{10}{9} m^4 + 2m^8 \right), \quad m = \tanh z \quad (31)$$

$U(1)$  群,  $M=15$

$$z = \beta, \quad m = I_1(z)/I_0(z) \quad (32)$$

$SU(2)$  群,  $M=2$

$$z = \beta \left( 1 + \frac{10}{9} m^4 + 2m^8 \right), \quad m = I_2(z)/I_1(z) \quad (33)$$

由上式计算的  $E_P \sim \beta$  曲线, 分别为图 4, 5。

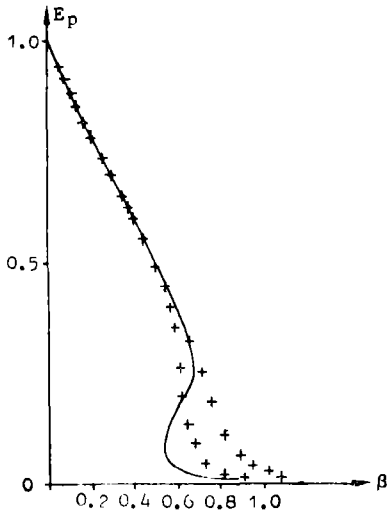


图4 3维Z(2)格点规范场的相图  
Fig.4 Phase diagram of 3-D Z(2) lattice gauge theory  
实线为本文计算结果，+字线为MC计算结果

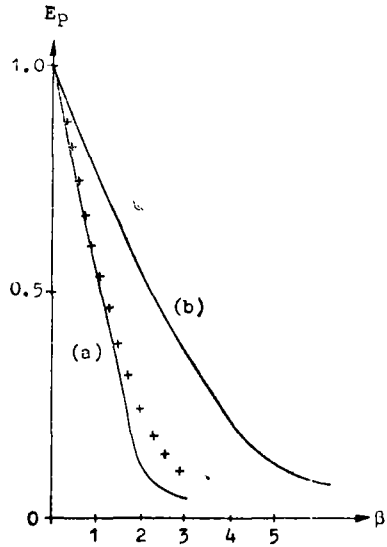


图5 3维U(1)和SU(2)格点规范场的相图  
Fig.5 Phase diagram of 3-D U(1) and SU(2) lattice gauge theory  
a. U(1)格点规范场.实线为本文计算结果，+字线为MC计算结果(取自文[1])  
b. SU(2)格点规范场.实线为本文计算结果

### 3 讨论

本文应用混合元格变量—链变量作用量作为改进平均场理论的试探作用量，对3维时空中Z(2)、U(1)和SU(2)群纯格点规范场的平均元格内能 $E_p$ 作了变分计算。所得结果与MC计算相符。特别是对于3维Z(2)群，得到具有范德瓦尔斯型曲线的一级相变的相图，这是用其他试探作用量作解析计算得不到的结果。但是由于本文中的等效自由能不能准确计算，确定内部立体的最佳层数不够准确，而且在划分内部立体与外部元格时，忽略了彼此间的耦合，当 $\beta$ 不大时，这是较好的近似。但当 $\beta$ 很大时，元格间的关联效应变大，内部立体和外部元格间的耦合不能完全忽略。忽略之后计算得到的 $E_p$ 值偏低，表现在图4、5中 $E_p$ 过快趋于零。这些问题我们正进一步研究。

### 参 考 文 献

- 1 Creutz M, Jacobs L, Rebbi C. Phys Rev, 1979, D 20: 1915  
Bhanot G, Creutz M. Phys Rev, 1980, D 21: 2892
- 2 Creutz M. Phys Rev, 1980, D 21: 2308
- 3 Brezin E, Drouffe J. Nucl Phys, 1982, B 200: 93
- 4 Hsien T C, He X H, Song Y S. Phys Lett, 1985, 153B: 417

- 5 Zheng X T, Tan Z G, Wang J. Nucl Phys, 1987, B 287: 171  
6 郭硕鸿, 刘金明, 陈启洲. 中山大学学报(自然科学版), 1984 (4): 48  
Guo S H, Chen Q Z, Liu J M. Commun Theor Phys, 1983, 2: 1575

## Phase Diagrams of Lattice Gauge Theories with Mixed Trial Action in Three Dimensions

*Liu Jinming\* Huang Chaosheng Guo Shuohong*

**Abstract** Using mixed plaquette variable-link variable action as a trial action of modified mean field theory, we calculate the mean plaquette energies  $E_p$  of pure  $Z(2)$ ,  $U(1)$  and  $SU(2)$  lattice gauge fields in three dimensions. Phase diagram of first order phase transition of Van der Waals' curve like is obtained for  $Z(2)$  group and the results cannot be derived with any other trial actions. The  $E_p-\beta$  curves for 3-D  $U(1)$  and  $SU(2)$  group are smooth, showing only a single, confining phase. The results from strong-coupling region to crossover region can describe the phase structure well and are in good agreement with the Monte Carlo results.

**Keywords** lattice gauge theory, phase diagram, mixed trial action

\* Department of Physics, Zhongshan University