第33卷 第4期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 33 No. 4
1994年10月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Oct. 1994

双非线性抛物组解最大模的估计*

梁鋈廷

（中山大学数学系，广州 510275）

摘　要　对一类双非线性抛物组的有界解，作出最大模的先验估计．

关键词　双非线性抛物组，广义解，有界解

分类号　O175.26

设 G 是 n 维欧氏空间 E^n 中的有界区域，$T>0$. 在 $Q=G\times(0,T)$ 上考虑下面的抛物组

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\lambda-2}u^i)-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u^i)=B_i(x,t,u,\nabla u)+f_i(x,t),\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1}$$

其中 $u=(u^1,u^2,\cdots,u^N)$，$p\geqslant 2$，

$2\leqslant\lambda\leqslant np/(n-p)$，当 $p<n$；$2<\lambda<+\infty$ 当 $p\geqslant n$. 设 $B_i(x,t,u,\xi)$ 关于 x,t 可测关于 u,ξ 连续，并且 $B_i(x,t,u,\xi)=c_i(x,t,u,\xi)+\mu|u|^{\alpha-2}u^i$，$\mu>0$

$$q=p(n+\lambda)/(m+p)\leqslant\alpha\leqslant l=p(1+\frac{\lambda}{n}); \tag{2}$$

$$c_i(x,t,u,\xi)=c^\beta(x,t)|\nabla u|^{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial x\beta}u^i,\quad p-\frac{n+p}{n+\lambda}\leqslant\gamma<p \tag{3}$$

$$c(x,t)=\Big(\sum_{\beta=1}^{n}|c^\beta(x,t)|^2\Big)^{1/2}\in L_r(Q) \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}<1-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{\iota}\quad 当\ \gamma_0=p-\frac{n+p}{n+\lambda}\leqslant\gamma<\gamma_1=p-\frac{n}{n+\lambda}$$

$$r=\infty\qquad 当\ \gamma=\gamma_1$$

$$r>(n+p)/(p-\gamma)\qquad 当\ \gamma_1<\gamma<p$$

$$f(x,t)=\Big(\sum_{i=1}^{N}|f_i(x,t)|^2\Big)^{1/2}\in L_s(Q),\quad s>1+n/p \tag{5}$$

我们只限于考虑(1)的有界广义解，即 $u=(u^1,\cdots u^N)\in c(0,T;L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;W_p^1(G))\cap L_\infty(Q)$ 并且

收稿日期：1993-04-26

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助课题

$$\int_0^t\int_G\{-|u|^{\lambda-2}u^iv_t^i+|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_G|u|^{\lambda-2}u(x,t)v(x,t)|_{t=0}^{t=t}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^t\int_G[B_i(x,t,u,\nabla u)+f_i(x,t)]v^i\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (1)'$$

$\forall\ t\in(0,T)$，$v=(v^1,\cdots,v^N)\in W_\lambda^1(0,T;L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$.

定理 设 u 是(1)的广义解，设条件(2)～(5)满足．此外补充假设 $s=\infty$，

$$\gamma\geqslant p-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q-1}\right)\ \text{即}\ \frac{1}{2}-(q-1)\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)\geqslant 0 \qquad (6)$$

如果存在常数 $M>0$，使 $(|u|-M)^+\in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$ 和 $(|u|-M)^+|_{t=0}=0$，那么成立

$$\|u\|_{L_\infty(Q)}=\operatorname{vrai}\max_Q|u|\leqslant\max\left\{M,\left(\frac{1}{\mu}\|f\|_{L_\infty(Q)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\} \qquad (7)$$

证明 把(7)的右端记为 M_0，要证 $\|u\|_{L_\infty(Q)}\leqslant M_0$．设不然，那么成立 $\|u\|_{L_\infty(Q)}=M'>M_0$．设 $k>M_0$，那么根据定理假设，$(|u|-k)^+\in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$ 和 $(|u|-k)^+|_{t=0}=0$ 成立．为推导简单，设 $u_t^i\in(L_\lambda(Q)$(否则可通过根限过程来过渡)．取 $v=(v^1,\cdots,v^N)$，$v^i=\left(1-\frac{k}{|u|}\right)^+u^i$．那么 $v\in W_\lambda^1(0,T;L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$ 可取作试验函数．对这样的 v，我们有

$$[\mu|u|^{\alpha-2}u^i-f_i(x,t)]v^i\geqslant(\mu|u|^{\alpha-1}-|f(x,t)|)(|u|-k) \qquad (8)$$

由于取 $k\geqslant M_0$，在 $Q\cap\{|u|>k\}$ 上，

$$\mu|u|^{\alpha-1}-|f(x,t)|\geqslant\mu M_0^{\alpha-1}-|f(x,t)|\geqslant 0 \qquad (9)$$

将 v 代入(1)′，经过对 t 的分部积分并注意到(8)，(9)即得

$$\int_0^t\int_{G\cap\{|u|>k\}}\left\{\left(\frac{1}{\lambda}|u|^\lambda\right)_t+|\nabla u|^{p-2}\left[\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^2+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_0^t\int_{G\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)c(x,t)|\nabla u|^{\gamma-1}|\nabla(|u|)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (10)$$

由于设 $\lambda>2$，因而

$$\int_0^t\int_{G\cap\{|u|>k\}}\left(\frac{1}{\lambda}|u|^\lambda\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{G\cap\{|u|>k\}}\frac{1}{\lambda}(|u|^\lambda-k^\lambda)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\frac{1}{\lambda}\int_{G\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^\lambda\mathrm{d}x \qquad (11)$$

联合以上结果并对 $t\in(0,T)$ 求上确界，给出

$$\operatorname{vrai}\max_{t\in(0,T)}\int_G\frac{1}{\lambda}|(|u|-k)^+|^\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}|\nabla u|^{p-2}\left[\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^2+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)c(x,t)|\nabla u|^{\gamma-1}|\nabla(|u|)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=2\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^{\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{2}}|\nabla u|^{p(\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{2})}(|u|-k)^{q(1-\frac{\gamma}{p})}$$
$$\cdot|u|^{\frac{1}{2}-(q-1)(1-\frac{\gamma}{p})}c(x,t)|\nabla u|^{\frac{p}{2}-1}|\nabla(|u|)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\leqslant (M')^{1-q(1-\frac{\gamma}{p})}\|c(x,t)\|_{L_r(Q\cap\{k<|u|<M'\})}|Q\cap\{k<|u|<M'\}|^{\theta}$$

$$\cdot\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{2}}\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{l}\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)}$$

$$\cdot\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}|\nabla u|^{p-2}|\nabla(|u|)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\varepsilon(k)\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{q/l(1-\frac{\gamma}{p})}$$

$$\cdot\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}|\nabla u|^{p-2}\left[\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^2+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{\gamma}{p}} \tag{12}$$

其中　$\varepsilon(k)=2(M')^{1-q\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)}\|c(x,t)\|_{L_r(Q\cap\{k<|u|<m'\})}|Q\cap\{k<|u|<M'\}|^{\theta}$

$$\theta=1-\left(\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{q}{l}\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)-\frac{1}{r}-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)\left(1-\frac{q}{l}\right)-\frac{1}{r}>0$$

借助 Young 不等式，由(12)即得

$$\underset{t\in(0,T)}{\text{vrai max}}\int_G|(|u|-k)^+|^\lambda\mathrm{d}x+\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}|\nabla u|^{p-2}\cdot\left[\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^2\right.$$

$$\left.+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c(\varepsilon(k))^{\frac{p}{p-\gamma}}\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{q/l} \tag{13}$$

其中的常数 $c>0$ 和 k 无关．由于 $(|u|-k)^+\in c(0,T;L_\lambda(G))\cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(G))$，成立

$$\left(\iint_Q|(|u|-k)^+|^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{q/l}\leqslant c(n,p,\lambda)\left\{\underset{t\in(0,T)}{\text{vrai max}}\int_G|(|u|-k)^+|^\lambda\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\iint_Q|\nabla(|u|-k)^+|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\} \tag{14}$$

联合(13)，(14)给出

$$\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{q/l}\leqslant c\varepsilon(k)^{\frac{p}{p-\gamma}}\left(\iint_{Q\cap\{|u|>k\}}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{q/l} \tag{15}$$

即　　$1\leqslant c\varepsilon(k)^{\frac{p}{p-\gamma}}$.

然而由于 $\theta>0$，当 $k\uparrow M'$ 时，$\varepsilon(k)\to 0$，矛盾！于是定理获证．

Estimates on Maximum Modulus for Solutions of Doubly Nonlinear Parabolic Systems

Liang Xiting *

Abstract　The a priori estimate is established to the maximum modulus of solutions of doubly nonlinear parabolic systems.

Keywords　doubly nonlinear parabolic system, generalized solution, bounded solution

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275