第 33 卷 第 3 期
1994 年 7 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 33 No. 3
Jul. 1994

关于 π-正则半群的 Green 关系*

龙冬阳
(中山大学数学系,广州 510275)

摘 要 给出了 π-正则半群上一类广义的 Green 关系中,若干关系类都含有唯一的幂等元的若干特征.

关键词 π-正则,Green 关系,幂等元
分类号 O125.7

1 前 言

众所周知,半群的 Green 关系 $\mathscr{L}$、$\mathscr{R}$、$\mathscr{H}$、$\mathscr{D}$、$\mathscr{J}$ 在正则半群的研究中具有非常重要的地位[1,2],π-正则(或幂,拟正则)半群作为正则半群的拓广已成为研究半群代数理论中的主流之一[3]. 本文讨论:当 π-正则半群 S 的广义的 Green 关系 $\mathscr{L}^*$,$\mathscr{R}^*$,$\mathscr{H}^*$,$\mathscr{D}^*$ 及 $\mathscr{J}^*$ 中的若干个关系类都含有唯一的幂等元时,半群 S 具有什么特征?

文中有关概念与记号均可参见文献[1—3].

先给出一些必要的概念与记号. 设 S 是一个半群,则 S 是 π-正则的,如果对于每一 $a\in S$ 存在 $m\in Z^+$ 使得 $a^m\in a^mSa^m$;称 S 为 π-逆的,如果对于每一 $a\in S$ 存在 $m\in Z^+$ 及唯一的 $x\in S$ 使得 $a^m=a^mxa^m$,$x=xa^mx$;称 S 为强 π-逆的,如果 S 是 π-正则的,且 S 的所有幂等元可交换;称 S 为 GV-半群,如果 S 是 π-正则的,且 S 的每一正则元是完全正则的;一个 GV-半群称为 GV-逆半群,如果 GV-半群中的每一个正则元都具有唯一的逆元. 对于半群 S,若存在 S 的一个子群 G 使得对于每一 $a\in S$ 存在 $m\in Z^+$ 都有 $a^m\in G$,则称 G 为 π-群. 文中分别用 $E(S)$ 与 $\mathrm{Reg}(S)$ 表示半群 S 的幂等元集与正则元集. 若 $a\in \mathrm{Reg}(S)$,则用 $V(a)$ 表示 a 的逆元集. 设 S 是 π-正则半群,则关于每一 $a\in S$,记 $r(a)=\min\{p\in Z^+ \mid a^p\in \mathrm{Reg}(S)\}$. 关于 π-正则半群 S,我们定义 S 上的等价关系 $\mathscr{L}^*$,$\mathscr{R}^*$,$\mathscr{H}^*$,$\mathscr{D}^*$,$\mathscr{J}^*$ 如下:

$$a\mathscr{L}^*b \Leftrightarrow Sa^{r(a)}=Sb^{r(b)},$$

$$a\mathscr{R}^*b\Leftrightarrow a^{r(a)}S=b^{r(b)}S$$

$$a\mathscr{J}^*b\Leftrightarrow Sa^{r(a)}S=Sb^{r(b)}S,$$

$$\mathscr{H}^*=\mathscr{L}^*\cap\mathscr{R}^*,\quad \mathscr{D}^*=\mathscr{L}^*\vee\mathscr{R}^*.$$

收稿日期:1991-3-7;修改完成日期:1994-4-28
* 国家自然科学基金资助项目

从定义易知，当 S 为正则半群时，S 上的关系 $\mathscr{L}^*$、$\mathscr{R}^*$、$\mathscr{H}^*$、$\mathscr{D}^*$、$\mathscr{J}^*$ 恰是通常的 Green 关系 $\mathscr{L}$、$\mathscr{R}$、$\mathscr{H}$、$\mathscr{D}$、$\mathscr{J}$. 而对于一般的 π-正则半群，则 $\mathscr{L}^*\neq\mathscr{L}$、$\mathscr{R}^*\neq\mathscr{R}$、$\mathscr{H}^*\neq\mathscr{H}$、$\mathscr{D}^*\neq\mathscr{D}$、$\mathscr{J}^*\neq\mathscr{J}$.. 除 $\mathscr{D}^*$ 之外，[3]中已给出了 $\mathscr{L}^*$、$\mathscr{R}^*$、$\mathscr{H}^*$、$\mathscr{J}^*$ 的若干性质，已有

引理 1([3]，引理Ⅹ.1.1，引理Ⅹ.1.3，命题Ⅹ.1.3). 设 S 是 π-正则半群，则有

(i) 每一个 $\mathscr{L}^*$-($\mathscr{R}^*$-、$\mathscr{J}^*$-)类至少含有一个幂等元；

(ii) 每一个 $\mathscr{H}^*$-类最多含有一个幂等元；

(iii) 每一个 $\mathscr{H}^*$-类含有唯一的幂等元⇔S 是一个 GV-半群.

2 主要结果

先给出 $\mathscr{D}^*$ 的两个性质，它类似于 Green 关系 $\mathscr{L}$ 与 $\mathscr{R}$ 及 $\mathscr{D}$. 定理 1 与 2 的证明从略.

定理 1　$\mathscr{L}^*\circ\mathscr{R}^*=\mathscr{R}^*\circ\mathscr{L}^*$，即 $\mathscr{L}^*$ 与 $\mathscr{R}^*$ 可交换.

推论 1　$\mathscr{D}^*=\mathscr{L}^*\circ\mathscr{R}^*=\mathscr{R}^*\circ\mathscr{L}^*$.

定理 2　设 S 是周期半群，则 $\mathscr{D}^*=\mathscr{J}^*$.

下面给出每一个 $\mathscr{L}^*$-($\mathscr{R}*$、$\mathscr{H}^*$-、$\mathscr{J}^*$-)类包含唯一幂等元的 π-正则半群 S 的若干特征.

定理 3　设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{L}^*$-类包含唯一的幂等元；

(ii) $(\forall a\in S)(\forall a',a''\in V(a^{r(a)}))a'a^{r(a)}=a''a^{r(a)}$；

(iii) $(\forall e,f\in E(S))(\exists m\in Z^+)(ef)^m=(fef)^m$.

定理 4　设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 R^*-类含有唯一的幂等元；

(ii) $(\forall a\in S)(\forall a',a''\in V(a^{r(a)}))a^{r(a)}a'=a^{r(a)}a''$；

(iii) $(\forall e,f\in E(S))(\exists m\in Z^+)(ef)^m=(efe)^m$.

定理 5　设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{L}^*$-类及每一个 $\mathscr{R}^*$-类均含唯一的幂等元；

(ii) $(\forall a\in S)(\forall a'a''\in V(a^{r(a)})),a'a^{r(a)}=a''a^{r(a)}a^{r(a)}a'=a^{r(a)}a''$；

(iii) $(\forall e,f\in E(S))(\exists m\in Z^+)(ef)^m=(fe)^m$；

(iV) S 是 π-逆半群.

定理 3、4、5 的证明略.

定理 6　设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{D}^*$-类含有唯一的幂等元；

(ii) 每一个 J^*-类含有唯一的幂等元；

(iii) $\mathscr{H}^*=\mathscr{L}^*=\mathscr{R}^*=\mathscr{D}^*=\mathscr{J}^*$；

(iv) S 是 GV-半群，且是一个 π-逆半群；

(v) S 是 π-群的半格.

证明　将证(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(ii)及(i)⇒(iv)⇒(iii)⇒(i).

(ii)⇒(iii)，因为 $\mathscr{L}^*\subseteq\mathscr{J}^*$，故由引理 1 和(ii)知，$\mathscr{L}^*=\mathscr{J}^*$. 同理 $\mathscr{R}^*=\mathscr{J}^*$. 故 $\mathscr{H}^*$

$=\mathscr{L}^*=\mathscr{R}^*=\mathscr{D}^*=\mathscr{J}^*$.

(iii)⇒(iv). 由引理 1 及定理 5 可得.

(iv)⇒(v). 因为 S 是 GV-半群，据文[3]定理Ⅹ.1.1，则 S 是完全 Archimedean 半群 $S_\alpha(\alpha\in Y)$的半格. 再由[3]定理Ⅵ.2.2.1 知 S_α 是完全单半群 G_α 的幂零扩张，其中 G_α 是 S_α 的完全单核，即 S_α 中的最小理想. 又因 S 是 π-逆的，于是 S_α 是 π-逆的，故 G_α 也是 π-逆的半群. 因此据定义，对于每一 $a\in G_\alpha$ 存在 $m\in Z^+$ 使得 a^m 具有唯一的逆元. 即 $V(a^m)$ 只含一个元. 设 $e,f\in E(G_\alpha)$，$x\in V(ef)$，则 $fxefxe=fxe$，即 $fxe\in E(G_\alpha)$，$V(fxe)=\{fxe\}$. 而 $fxe(ef)fxe=fxe$，$ef(fxe)ef=ef$，所以 $fe\in V(fxe)$，$ef=fxe$，$ef\in E(G_\alpha)$. 类似可证 $fe\in E(G_\alpha)$. 但 $fxe(fe)fxe=fxe$，$fe(fxe)fe=fe$，所以 $fe\in V(fxe)=\{ef\}$ 即 $ef=fe$. 这说明 G_α 是一个完全单半群且 G_α 中幂等元可交换，由此易推得 G_α 是一个群. 所以 S_α 是一个 π-群，即 S 是 π-群的半格.

(v)⇒(ii). 因为每一个 $\mathscr{J}^*$-类至少含有一个幂等元，故只需证明每一个 $\mathscr{J}^*$-类最多含一个幂等元即可. 由(V)知，在 S 上定义关系 ρ 如下：$a\rho b\Leftrightarrow a,b$ 同在一个 π-群中. 则 ρ 是 S 上的半格同余，且每一个 ρ-类是一个 π-群，易见每一 π-群最多含一个幂等元. 因此若能说明 $\mathscr{J}^*\subseteq\rho$ 则显然 $\mathscr{J}^*$-类最多含一个幂等元. 下面就证明，对于一个 GV-半群 S，则 $\mathscr{J}^*$ 是 S 上最小半格同余. 由[3]定理Ⅹ.1.1 知，$\mathscr{J}^*$ 是半格同余. 设 η 是 S 上最小半格同余，则 $\eta\subseteq\mathscr{J}^*$. 现设 $a\mathscr{J}^*b$，即存在 $x,y,u,v\in S$ 使得 $a^{r(a)}=xb^{r(b)}y$，$b^{r(b)}=ua^{r(a)}v$. 于是 $a\eta=(a\eta)^{r(a)}=(a^{r(a)})\eta=x\eta(b^{r(b)})\eta y\eta=x\eta b\eta y\eta$，$b\eta=(b\eta)^{r(b)}=(b^{r(b)})\eta=u\eta(a^{r(a)})\eta v\eta=u\eta a\eta v\eta$. 所以 $a\eta\geqslant b\eta$，$b\eta\geqslant a\eta$，即 $a\eta=b\eta$，$a\eta b$. 因此 $\mathscr{J}^*\subseteq\eta$，$\mathscr{J}^*=\eta$. 这就证明了(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(ii).

根据上面的证明与引理 1 易证(i)⇒(iv)⇒(iii)⇒(i).

据定理 5，6 及[3]中的定理Ⅹ.3.1，则有

推论 2 设 S 是 π-正则则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{D}^*$-($\mathscr{J}^*$-)类含有唯一的幂等元；

(ii) 从 $\mathscr{L}^*$，$\mathscr{R}^*$，$\mathscr{H}^*$，$\mathscr{D}^*$，$\mathscr{J}^*$ 中任取 3 个，则 3 个关系类均包含唯一的幂等元；

(iii) S 是 π-半群的半格；

(iv) S 是 GV-逆半群；

最后，我们给出从关系 $\mathscr{L}^*$，$\mathscr{R}^*$，$\mathscr{H}^*$，$\mathscr{D}^*$，$\mathscr{J}^*$ 中的任取 2 个，若这两个关系的每一关系等价均含唯一的幂等元的若干特征. 以下定理证明均从略.

定理 7 设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{H}^*$-类与每一 $\mathscr{L}^*$-类均含有唯一的幂等元；

(ii) S 是右群的幂零扩张的半格.

定理 8 设 S 是 π-正则半群，则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{H}^*$-类与每一 $\mathscr{R}^*$-类均含有唯一的幂等元；

(ii) S 是左群的幂零扩张的半格.

定理 7 与定理 8 的直接推论，可得到正则半群的两个类似结果.

定理 9 设 S 是正则半群，则下面条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{H}$-类与每一 $\mathscr{L}$-类均含有唯一的幂等元；

(ii) S 是右群的半格.

定理10 设 S 是正则半群.则下列条件等价：

(i) 每一个 $\mathscr{H}$-类与每一 $\mathscr{R}$-类均含有唯一的幂等元；

(ii) S 是左群的半格.

参 考 文 献

1 Clifford A H, Preston G B. The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys No. 7, Vol1 1961

2 Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory, Academic Press, London, 1976

3 Bogdanovic S. Semigroups with a System of Subsemigroups. Novi Sad, 1985

Green's Relations on π-Regular Semigroups

Long Dongyang *

Abstract Several characteristics of π-regular semigroups in which some equivalent classes of a generalized Green's relations on π-regular semigroups contain a unique idempotent are given

Keywords π-regular semigroups, Green's relations, idempotent.

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275