第 34 卷 第 2 期　　中山大学学报(自然科学版)　　Vol. 34 No. 2
1995 年 4 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Apr. 1995

# 接近一致光滑和局部接近一致凸的 Banach 空间*

黎 永 锦
(中山大学数学系,广州 510275)

**摘　要**　给出了Banach空间X是接近一致光滑的一个很简明的充要条件，证明了Banach空间 $X$ 是局部一致凸的当且仅当 $X$ 是局部接近一致凸，且 $X$ 是严格凸，并具有(WM)性质.

**关键词**　接近一致凸，接近一致光滑，局部接近一致凸

**分类号**　O177.2

文〔1〕引进了接近一致凸和一致 Kadec — Klee (UKK) 性质,证明了 Banach 空间 $X$ 是自反的和具有(UKK) 性质当且仅当 $X$ 是接近一致凸的. 文〔2〕引进了接近一致光滑，并证明接近一致光滑是接近一致凸的共轭性质. 本文将给出 Banach 空间 $X$ 是接近一致光滑的一个很简明的充要条件，并证明若Banach空间 $X$ 是接近一致光滑的，且 $X$ 是光滑的，则 $X$ 一定是强光滑的；还证明了 Banach 空间 $X$ 是局部一致凸的当且仅当 $X$ 是局部接近一致凸的，且 $X$ 是严格凸的，并具有(WM) 性质，从而弄清了局部一致凸与局部接近一致凸的关系.

**定义 1**[3]　Banach 空间 $X$ 称为局部一致凸的，如果对任何 $\varepsilon > 0$，$x \in S(X)$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$，使得，当 $y \in S(X)$，$\|(x+y)/2\| > 1-\delta$ 时，有 $\|x-y\| < \varepsilon$.

**定义 2**[1]　Banach 空间 $X$ 称为接近一致凸的，如果下列条件成立：对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U(X) \\ \operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow co(x_n) \cap B_\delta(0) \neq \varnothing$$

其中，$\operatorname{sep}(x_n) \equiv \inf\{\|x_n - x_m\|, n \neq m\}$，$B_\delta(0) = \{x \mid \|x\| < \delta\}$.

**定义 3**[1]　Banach 空间 $X$ 称为一致 Kadec — Klee 空间，如果下列条件成立；对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U(X),\ x_n \xrightarrow{W} x \\ \operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \|x\| < \delta$$

**定义 4**[2]　Banach 空间 $X$ 称为接近一致光滑的，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使得，

收稿日期：1993-11-11
* 中山大学青年科学基金资助课题

对每个 $t \in [0,\eta)$ 和 $U(X)$ 中的每个基序列 $\{x_n\}$ 存在 $k > 1$，使得 $\|x_1 + t \cdot x_k\| \leqslant 1 + \varepsilon \cdot t$.

**定义 5**[4]　Banach 空间 $X$ 称为局部接近一致凸的，若对任意 $x \in X$，$\|x\| = 1$，和任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$，使得对 $\{x_n\} \subset U(X)$，$\mathrm{sep}(x_n) > \varepsilon$，有 $co(\{x\} \cup \{x_n\}) \cap (1-\delta)B \neq \varnothing$.

**定义 6**[5]　如果对 $x \in S(X)$，$x_n \in U(X)$，$f_x \in A_x = \{f \in S(X^*) \mid f(x) = 1\}$，$\|x_n + x\| \longrightarrow 2$，有 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $f_x(x_{n_k}) \longrightarrow 1$，则称Banach空间具有(WM)性质.

S. Prus 在[2]中关于接近一致光滑的定义较为复杂，下面我们将给出Banach空间 $X$ 接近一致光滑的一个很简明的充要条件.

**定理 1**　若 $X$ 是 Banach 空间，则下列条件等价：

(1) $X$ 是接近一致光滑的；

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得当 $f_n \in S(X^*)$，$x \in S(X)$，$|f_n(x) - 1| < \delta$ 时，我们有 $\mathrm{sep}(f_n) < \varepsilon$；

(3) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得 $f_n \in U(X^*)$，$x \in S(X)$，$|f_n(x) - 1| < \delta$ 时，有 $\mathrm{sep}(f_n) < \varepsilon$；

(4) $X^*$ 是接近一致凸的.

**证明**　(2)⇒(3) 对任意 $\varepsilon > 0$，令 $\varepsilon' = \varepsilon/6$，则存在 $0 < \delta' < 1$，使得 $f_n \in S(X^*)$，$x \in S(X)$，$|f_n(x) - 1| < \delta'$ 时，我们有 $\mathrm{sep}(f_n) < \varepsilon'$. 令 $\delta = \min\{\delta'/3, 1/2, \varepsilon/6\}$，若 $g_n \in U(X^*)$，$x \in S(X)$，且 $|g_n(x) - 1| < \delta$，令 $f_n = g_n/\|g_n\|$，则 $|f_n(x) - 1| = |g_n(x)/\|g_n\| - 1| \leqslant |g_n(x) - 1| + |((1 - \|g_n\|)/\|g_n\|)g_n(x)| < \delta + 2\delta < \delta'$. 故 $\mathrm{sep}(f_n) < \varepsilon'$，即存在 $f_n, f_m$ 使得 $\|f_n - f_m\| < \varepsilon'$，因而 $\|g_n - g_m\| \leqslant (\|g_n/\|g_n\| - g_m/\|g_m\|\|) + \|((1 - \|g_n\|)/\|g_n\|) \cdot g_n\| + \|((1 - \|g_m\|)/\|g_m\|)g_m\| \leqslant \varepsilon' + (1 - \|g_n\|)/\|g_n\| + ((1 - \|g_m\|)/\|g_m\|) \leqslant \varepsilon' + 2\delta + 2\delta \leqslant \varepsilon/6 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$，所以，$\mathrm{sep}(g_n) < \varepsilon$.

(3)⇒(4)，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得当 $f_n \in U(X^*)$，$x \in S(X)$，$|f_n(x) - 1| < \delta$ 时，我们有 $\mathrm{sep}(f_n) < \varepsilon$，故若 $f_n \in U(X^*)$，$\mathrm{sep}(f_n) \geqslant \varepsilon$，则对任意 $x \in S(X)$，$|f_n(x) - 1| \geqslant \delta$，故 $|f_n(x)| \leqslant 1 - \delta$，因而 $\|f_n\| \leqslant 1 - \delta$，令 $\delta' = 1 - \delta$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta' < 1$，使得 $co(f_n) \cap B_{\delta'}(0) \neq \varnothing$，所以 $X^*$ 是接近一致凸的.

(4)⇒(3)，假设(3)不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对任意 $\delta' > 0$，存在序列 $f_n^{(\delta')} \in S(X^*)$，$x^{(\delta')} \in S(X)$，满足 $|f_n^{(\delta')}(x^{(\delta')}) - 1| < \delta'$，且 $\mathrm{sep}(f_n^{(\delta')}) \geqslant \varepsilon_0$. 既然 $X^*$ 是接近一致凸的，故对 $\varepsilon_0 > 0$，存在 $0 < \delta < 1$，使得 $f_n \in U(X^*)$，且 $\mathrm{sep}(f_n) \geqslant \varepsilon_0$ 时，有 $co(f_n) \cap B_\delta(0) \neq \varnothing$. 令 $\delta' = (1 - \delta)/2$，则由上面假设可知有序列 $f_n \in S(X^*)$，$x \in S(X)$，使得 $|f_n(x) - 1| < (1 - \delta)/2$ 且 $\mathrm{sep}(f_n) \geqslant \varepsilon_0$，我们有 $co(f_n) \cap B_\delta(0) \neq \varnothing$，即存在 $0 < \lambda_i < 1$，$\sum \lambda_i = 1$ 和 $f_{n_i} \in \{f_n\}$，使得 $\|\sum \lambda_i f_{n_i}\| < \delta$，故 $\delta > \|\sum \lambda_i f_{n_i}\| \geqslant \sum \lambda_i f_{n_i}(x) > (1 + \delta)/2$，但 $0 < \delta < 1$，因而矛盾，这个矛盾证明(4)⇒(3)成立.

(4)⇒(1)，据[2].

(3)⇒(2) 容易证明.

**定理2** 若Banach空间$X$是接近一致光滑且光滑的，则$X$是强光滑的.

**证明** 若Banach空间$X$是接近一致光滑的，则$X^*$是接近一致凸的，故$X^*$是自反的(UKK)空间，因而$X^*$具有$(H)$性质，对$x \in S(X)$，$f_n \in S(X^*)$，$f_n(x) \longrightarrow 1$，既然$X^*$是自反的，有$\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$，使$f_{n_k} \xrightarrow{w} f$，容易看出$f(x)=1$，由于$X^*$具有$(H)$性质，因此$f_{n_k} \longrightarrow f$，因为$X$是光滑的，所以$f_n \longrightarrow f$，即$X$是强光滑的. 因为不然的话，则存在$\varepsilon_0 > 0$，及$\{f_{n_i}\} \subset \{f_n\}$，使得$\| f_{n_i} - f \| \geqslant \varepsilon_0$，而由上面的讨论可知存在子序列$\{f_{n_{i_k}}\} \subset \{f_{n_i}\}$使得$f_{n_{i_k}} \longrightarrow f'$，对某一$f' \in S(X^*)$，$f'(x) = 1$成立，由于$X$是光滑的，故$f' = f$，但这与$\| f_{n_i} - f \| \geqslant \varepsilon_0$矛盾，这一矛盾证明$X$是强光滑的.

由定理2以及凸性与光滑性的对偶特性，便得下面定理.

**定理3** 若$X^*$是接近一致凸且严格凸的，则Banach空间$X$是强光滑的.

**定理4** 若Banach空间$X$是接近一致凸且严格凸的，则$X^*$是强光滑的.

文〔4〕把接近一致凸局部化为局部接近一致凸，文〔6〕中，证明若$X$是局部接近一致凸的，则$X$具有Kadec性质. 在这里，我们利用(WM)性质，弄清了局部一致凸和局部接近一致凸的关系.

不难证得Banach空间$X$是局部接近一致凸的，当且仅当下列条件成立：对任意$x \in S(X)$，任意$\varepsilon > 0$，存在$0 < \delta < 1$，使得

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in U(X) \\ \mathrm{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon \\ \| x_n - x \| \geqslant \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\| \lambda x + (1-\lambda) y \| < \delta$对某一$\lambda \in (0,1)$及某一$y \in co\{x_n\}$成立.

为了证明方便，我们将直接采用以上性质作为局部接近一致凸的定义来使用.

**定理5** 若Banach空间$X$是局部一致凸的，则$X$是局部接近一致凸的.

由以上的局部接近一致凸的等价定义不难证得定理5成立，下面将证明若Banach空间$X$具有(WM)性质，且是局部接近一致凸和严格凸的，则$X$是局部一致凸的.

**定理6** 对于Banach空间$X$，下述命题等价：

(1) $X$是局部一致凸的；

(2) $X$是局部接近一致凸的，且$X$是严格凸，并具有(WM)性质.

**证明** 明显地，我们只须证明(2)⇒(1)成立. 假设$X$不是局部一致凸的，则存在$x \in S(X)$，$x_n \in S(X)$及$\varepsilon'_0 > 0$，使得$\| x_n - x \| \geqslant \varepsilon'_0$且$\| (x_n + x)/2 \| \longrightarrow 1$，由于$X$具有(WM)性质，因此有$f_x \in S(X^*)$，使得$f_x(x_n) \longrightarrow f_x(x) = 1$，故若$\{x_n\}$的某个子列以$y$为极限，则$f_x(x+y) = 2$，但$X$是严格凸的，因而我们有$x = y$，所以$\{x_n\}$的任何收敛子列必以$x$为极限，故$\{x_n\}$不是全有界的，从而存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$，使得$\mathrm{sep}(x_{n_i}) > \varepsilon''_0 > 0$，令$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon'_0, \varepsilon''_0\}$，则$\varepsilon_0 > 0$，且存在$\{y_n\} \subset \{x_{n_i}\}$使得$\mathrm{sep}(y_n) > \varepsilon_0$，$\| x - y_n \| \geqslant \varepsilon_0$，且$\| (x + y_n)/2 \| \longrightarrow 1$. 由于$X$具有(WM)性质，我们有$f_x(y_n) \longrightarrow 1$，故对任意$0 < \delta < 1$，存在$N$，使得$n > N$时$f_x(y_n) > \delta$，因而对任意$\lambda \in (0,1)$，$y \in co\{y_n, n \geqslant N\}$，$f_x(\lambda x + (1-\lambda) y) > \delta$，但这与$X$是局部接近一致凸矛盾，所以Banach空间$X$是局部一致凸的.

一般来说，局部接近一致凸空间不一定是严格凸的，但在 Orliz 函数空间 $L^*_{(M)}$ 和 $L^*_M$ 中，若它是局部接近一致凸的，则一定是严格凸的，因而不难看出下列定理成立.

**定理** 7　下述命题等价：

(1) $L^*_{(M)}$ 是局部接近一致凸的；

(2) $M(u) \in \triangle_2$ 且 $M(u)$ 严格凸.

**定理** 8　若 $M(u) \in \triangle_2 \cap \nabla_2$，则下述命题等价：

(1) $L^*_M$ 是局部接近一致凸的；

(2) $M(u)$ 是严格凸的.

## 参 考 文 献


1 Huff R. Banach spaces which are nearly uniformly convex. Rocky Mountain. J Math 1980,10: 743 ～ 749

2 Prus S. Nearly uniformly smooth Banach spaces. Bollettino. U M I. 1989,3 － B(7):507 ～ 521

3 Istratescu V. Strict convexity and complex strict convexity: theory and application. Dekker, New York, 1984

4 Kutazrova, Bor － Luh Lin. Locally k － nearly convex Banach spaces. Proc. of the Cofference on Function spaces, Univ. Southern Illinois at Edwardsville (1990)

5 Panada B B, Kapeer O P. A generaliztion of local uniform convexity of the norm. J Math Anal. 1975,52(3):300 ～ 308

6 Bor － Luh Lin, Wenyao Zhang. Some geometric properties related to uniformly convexity of Banach spaces, Function spaces, 281 ～ 293, Lecture Notes in Pure and Appl, Math., 136. Dekker, New York, 1992.


# Nearly Uniformly Smooth and Locally Nearly Uniformly Convex Banach Spaces

*Li Yongjin* *

**Abstract**　A sufficient and necessary condition of nearly uniformly smooth is given. It is shown that Banach space X is locally uniformly convex if and only if X is locally nearly uniformly convex and strictly convex and has (WM) property.

**Keywords**　nearly uniformly convex, nearly uniformly smooth, locally nearly uniformly convex.

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275