

距离空间上 B -值测度空间的弱拓扑*

王 汉 兴

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 一可测空间上取值于 Banach 空间的测度称为 B -值测度, 其全体构成一线性空间, 简称为 B -值测度空间, 本文给出了一类距离空间上 B -值测度空间分别为可分距离空间、紧距离空间的充要条件, 这些结果是实值测度理论中相应问题的推广.

关键词 测度, 概率测度, B -值测度, 可分空间, 紧致空间

分类号 O211.1

1 定义和记号

本文所列举的定义及命题主要来自于文献 [1, 2]. 恒设 Ω 是一距离空间, 其上的距离记为 d , 拓扑 σ -代数记为 β . $c(\Omega)$ 表示 Ω 上的有界实值连续函数全体, 其上赋上确界范数 $\|\cdot\|$. 以 $u(\Omega)$ 表示 Ω 上一切有界一致连续函数全体, 它是 $c(\Omega)$ 的线性子空间. 又设 X 是一可分的 Banach 空间, 其上的范数记为 $\|\cdot\|_X$. 以 X^* 表示 X 的对偶空间.

设 ξ 是 β 上 X -值测度, $\forall x^* \in X^*$, 记 $x^* \xi(E) = x^*(\xi(E))$, $\forall E \in \beta$. 显然 $x^* \xi$ 是 β 上一实值符号测度, 事实上, ξ 是 β 上的 X -值测度的充要条件是: $\forall x^* \in X^*$, $x^* \xi$ 是一实值符号测度.

定义 1 设 ξ 是 β 上的 X -值向量测度. $f(\omega)$ 是 β -可测实值函数. 称 f 是 ξ -可积的, 若:

1) $\forall x^* \in X^*$, f 是 $x^* \xi$ -可积的.

2) 存在 X 的元素: $\int_{\Omega} f(\omega) \xi(d\omega) \in X$, 使得:

$$x^* \int_{\Omega} f(\omega) \xi(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) x^* \xi(d\omega), \forall x^* \in X^*.$$

收稿日期: 1992-10-24

* 国家自然科学基金资助项目

则称 $\int_{\Omega} f(\omega)\xi(d\omega)$ 为 f 关于 ξ 的积分.

定义 2 设 ξ 是 β 上的 X -值测度, 若 $N(\xi) = \sup_{E \in \beta} \|\xi(E)\|_X < \infty$. 则称 ξ 是有界的. $N(\xi)$ 称为 ξ 的上确界.

以 M 表示 β 上有界 X -值测度全体. m 表示 β 上全变差有限的实值符号测度全体. 显然. $\forall \xi \in M, x^* \in X^*$, 有 $x^*\xi \in m$. 若 $\xi \in M$. 那么 ξ 是 $c(\Omega)$ 到 X 的有界线性算子, 同时 M 是实数域上的线性空间, 因此 M 是有界线性算子空间 $B(c(\Omega) \rightarrow X)$ 的一线性子空间.

定义 3 由半范族 $\{|x^*(\xi f)|: f \in c(\Omega), x^* \in X^*\}$ 在 M 上引入的局部凸拓扑 J 称为 M 上的弱拓扑. 其中 $\xi f = \int_{\Omega} f(\omega)\xi(d\omega)$. 若序列 $\{\xi_n\} \subset M$ 在弱拓扑 J 下收敛到 $\xi \in M$. 则称 $\{\xi_n\}$ 弱收敛到 ξ , 且记为 $\xi_n \Rightarrow \xi$.

显然, 拓扑空间 (M, J) 在 $\theta \in M$ 的一邻域基为: $V(f_i, x_j^*, \varepsilon_{i,j}, i \in I, j \in J) = \{\xi \in M: |x_j^*(\xi f_i)| < \varepsilon_{i,j}\}$ 其中 $f_i \in c(\Omega), x_j^* \in X^*, \varepsilon_{i,j} > 0, I, J$ 为任意二有限指标集.

下面研究拓扑空间 (M, J) .

2 空间 M 的可分距离化

寻求一种能使 M 成为可分距离空间的充要条件.

由半范族 $\{|\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega)|: f \in c(\Omega)\}$ 在 m 上引入的局部拓扑 Γ 为 m 上的弱拓扑, 它在 $\theta \in m$ 的邻域基为:

$$U(f_i, \varepsilon_i, i \in I) = \{\mu \in m; |\int_{\Omega} f_i(\omega)\mu(d\omega)| < \varepsilon_i, i \in I\}.$$

其中 $f_i \in c(\Omega), \varepsilon_i > 0, I$ 为任意有穷指标集.

引理 1 (m, Γ) 为一可分距离空间的充要条件是 Ω 为一可分距离空间.

$x^* \in X^*$ 是 X 上的线性连续泛函, 同时, 亦可将 x^* 视为一 M 到 m 的线性算子, 从而 $\{x^*: x^* \in X^*\}$ 是一 M 到 m 的线性算子族, 于是由线性算子族 $\{x^*: x^* \in X^*\}$ 在 M 上导出的拓扑 J_1 是和 M 的代数结构相容的拓扑, 即 (M, J_1) 是一线性拓扑空间. 它在 $\theta \in M$ 的一邻域基为:

$$V(x_i^*, i \in I) = \{\xi \in M: x_i^*\xi \in U, i \in I\}$$

其中 U 是 $\theta \in m$ 的任一基本邻域, I 是任一有穷指标集.

引理 2 算子族 $\{x^*: x^* \in X^*\}$ 在 M 上导出的拓扑 J_1 即为 M 的弱拓扑 J .

证明 只要注意到 $\theta \in m$ 的邻域基, 即易知 J_1 和 J 在 $\theta \in M$ 有相同的邻域基.

引理 3 设 $\xi, \eta \in M, \xi = \eta$ 的充要条件是: $\forall x^* \in X^*, x^*\xi = x^*\eta$.

证明 必要性显然, 往证充分性.

假设 $\forall x^* \in X^*, x^*\xi = x^*\eta$. 反设 $\xi \neq \eta$, 即 $\xi - \eta \neq \theta \in M$. 从而存在 $E \in \beta$, 使得 $(\xi - \eta)(E) \neq \theta \in X$, 由于 X 是一 Banach 空间, 它自然是 Hausdorff 的, 由线性拓扑空间的结果知, 必存在 $x_0^* \in X^*$, 使得 $x_0^*(\xi - \eta)(E) \neq 0$. 即 $x_0^*\xi \neq x_0^*\eta$, 与假设条件矛盾.

盾，从而 $\xi = \eta$.

引理 4 1) 设 $\mu, \nu \in M$, 若 $\forall f \in U(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \nu(d\omega)$$

则 $\mu = \nu$

2) 设 $\zeta \in M$; 若 $\forall f \in U(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega} f(\omega) \zeta d(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) \eta d(\omega)$$

则: $\xi = \eta$.

证明 1) 显然, 应用引理 3 以及 1) 即得 2).

引理 5 (M, J) 是一 Hausdorff 空间.

证明 由引理 2 知, J 即为线性算子族 X^* 所导出的拓扑, 众所周知, 由一线性算子族所导出的拓扑是 Hausdorff 的充要条件是零子空间的交为 $\{\theta\}$, 从而 (M, J) 为 Hausdorff 的充要条件是:

$$\bigcap_{x^* \in X^*} \{\xi \in M : x^* \xi = \theta \in M\} = \{\theta\}.$$

但由引理 3 知上式成立, 所以拓扑空间 (M, J) 是 Hausdorff 的.

定理 1 (M, J) 能成为一可分距离空间的充要条件是 Ω 为一可分的距离空间.

证明 必要性. 设 (M, J) 是一可分距离空间, 令 $M_1 = \{eI_{(\omega)} : \omega \in \Omega\}$, 其中 $e \in X$ 为单位元, 显然 $M_1 \subset M$. 又令 $T : \Omega \rightarrow M_1$ 为: $T(\omega) = eI_{(\omega)}$. 只要注意到 $\xi_n \rightarrow \xi$ 的充要条件是: 在 X 的拓扑下, $\int_{\Omega} f(\omega) \xi_n(d\omega) \rightarrow \int_{\Omega} f(\omega) \xi(d\omega), \forall f \in C(\Omega)$, 则易知 T 是一同胚映射, 而 M 的拓扑子空间 M_1 当然是一可分距离空间, 所以 Ω 是一可分距离空间.

充分性. 假设 Ω 是一可分距离空间, 众所周知, 在 Ω 上可以引入一与距离 d 等价的全有界距离 d_1 , 使得 Ω 成为一全有界距离空间, 从而不难知道 $U(\Omega)$ 为一可分空间, 设 $\{f_1, f_2, \dots\}$ 为 $U(\Omega)$ 的一可数稠子集.

对任一常数 $c \geq \|e\|_X$, $e \in X$ 为单位元, 令 $M_c = \{\xi \in M : N(\xi) \leq c\}$, 又令 $T : M_c \rightarrow X^\infty$ 如下:

$$\forall \xi \in M_c, T(\xi) = (\int_{\Omega} f_1 \xi(d\omega), \int_{\Omega} f_2 \xi(d\omega), \dots)$$

由于 X 是可分 Banach 空间, 所以 X^∞ 仍是一可分距离空间, 从而它的任一拓扑子空间亦为可分的, 因此, 如果能证明 T 是一 M_c 到 $T(M_c) \subset X^\infty$ 的同胚映射, 那么 M_c 就是一可分距离空间. 往证 T 是一同胚映射:

1) T 是 1-1 映射: 事实上, 假设 $T(\xi) = T(\eta)$, 从而 $\int_{\Omega} f_i \xi(d\omega) = \int_{\Omega} f_i \eta(d\omega), i = 1, 2, \dots$ 又由于 $\{f_i\}$ 在 $U(\Omega)$ 中稠密, 根据控制收敛定理立即得到: $\forall f \in U(\Omega), \int_{\Omega} f \xi(d\omega) = \int_{\Omega} f \eta(d\omega)$, 由引理 4 知 $\xi = \eta$, 所以 T 是 1-1 的.

2) T 是连续的: 假设 $\{\xi_n\} \subset M_c$, 且 $\xi_n \rightarrow \xi \in M_c$, 即 $\forall f \in U(\Omega), \int_{\Omega} f \xi_n(d\omega) \rightarrow \int_{\Omega} f \xi(d\omega)$, 特别地, 对一切 $i \geq 1$ 有: $\int_{\Omega} f_i \xi_n(d\omega) \rightarrow \int_{\Omega} f_i \xi(d\omega)$, 从而在 X^∞ 的积拓扑下:

$(\int f_1 \xi_n(dw), \int f_2 \xi_n(dw), \dots) \rightarrow (\int f_1 \xi(dw), \int f_2 \xi(dw), \dots)$ 即 $T(\xi_n) \rightarrow T(\xi)$, 所以 T 是连续的.

3) T^{-1} 是连续的: 令 $\{\xi_n\} \subset M_c$ 是一任意的序列, 且 $T(\xi_n) \rightarrow T(\xi)$, 那么, $\forall f \in U(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned} & \left\| \int f \xi_n(dw) - \int f \xi(dw) \right\|_X \\ & \leq \left\| \int (f - f_n) \xi_n(dw) \right\|_X + \left\| \int (f - f_n) \xi(dw) \right\|_X + \left\| \int f \xi_n(dw) - \int f \xi(dw) \right\|_X \\ & \leq [N(\xi) + N(\xi_n)] \cdot \|f - f_n\| + \left\| \int f \xi_n(dw) - \int f \xi(dw) \right\|_X \end{aligned}$$

注意到: $\xi \in M_c, \xi_n \in M_c, \forall n$, 有: $\sup [N(\xi) + N(\xi_n)] \leq 2c$ 于是:

$$\overline{\lim}_n \left\| \int f \xi_n(dw) - \int f \xi(dw) \right\|_X \leq 2c \|f - f_n\|.$$

所以, $\overline{\lim}_n \left\| \int f \xi_n(dw) - \int f \xi(dw) \right\|_X = 0 \quad \forall f \in U(\Omega)$.

此即, $\xi_n \rightarrow \xi$, 所以 T^{-1} 是连续的.

综上所述, M_c 是一可分距离空间, 往证 M 是可分距离空间, 实因, 当 $c_1 \leq c_2$ 时, $M_{c_1} \subseteq M_{c_2}$, 有 $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. 其中 $[\|e\|_X]$ 是 $\|e\|_X$ 的整数部分, 由 M_n 的可分性知 M 是可分的, 充分性得证.

从上面的定理证明中, 可以明显地看出有如下推论.

推论 1 1) 设 M_1 是 M 的任一拓扑子空间, 而且 $M_1 \supset \{e_{I(\omega)}; \omega \in \Omega\}$ 则 M_1 能成为一个可分距离空间的充要条件是 Ω 为一个可分距离空间.

2) 空间 m 为一个可分距离空间的充要条件是 Ω 为一个可分距离空间.

3) m 的拓扑子空间 $P = \{\lambda; \lambda \text{ 为概率测度}\}$ 为一个可分距离空间的充要条件是 Ω 为一个可分距离空间.

3 空间 M 的紧致性

除了仍设 X 是可分的 Banach 空间, 还假设 X 是紧致的.

引理 6^[1] 假设 Ω 是一紧致的 Hausdorff 空间. X 是紧致的 Banach 空间,

$T: c(\Omega) \rightarrow X$ 是一任意的线性算子, 则存在在 (Ω, β) 上 X 一值向量测度 ξ , 使得:

$$Tf = \int f(\omega) \xi(d\omega), \quad \forall f \in c(\Omega).$$

定理 2 空间 M 是一紧距离空间的充要条件是 Ω 为一紧距离空间.

证明 充分性. 假设 Ω 是一紧距离空间, 此时 $c(\Omega) = U(\Omega)$, 从而 $c(\Omega)$ 是一可分 Banach 空间. 设 $\{f_1, f_2, \dots\}$ 是 $c(\Omega)$ 中一可数稠集. 令:

$$T: M \rightarrow X^\infty$$

$$T(\xi) = (\int f_1 \xi(d\omega), \int f_2 \xi(d\omega), \dots), \forall \xi \in M.$$

那么由定理 1 中的证明知, T 是 M 到 $T(M) \subset X^\infty$ 的同胚映射, 由 Tychonoff 定理知 X^∞ 为一紧空间, 要证 M 是一紧空间, 只须证 $T(M)$ 是 X^∞ 的一闭子空间, 往证 $T(M)$ 是一闭子集.

设 $\xi_n \in M, n=1, 2, \dots$ 使得 $T(\xi_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots) \in X^\infty, \forall f \in c(\Omega)$, 存在 $\{f_k\}$ 的子列 $\{f_{k_j}\}$ 使得: 当 $j \rightarrow \infty, \|f_{k_j} - f\| \rightarrow 0$. 于是有:

$$\begin{aligned} & \left\| \int f \xi_n(d\omega) - \int f \xi_m(d\omega) \right\|_X \\ & \leq [N(\xi_n) + N(\xi_m)] \cdot \|f - f_{k_j}\| + \left\| \int f_{k_j} \xi_n(d\omega) - \int f_{k_j} \xi_m(d\omega) \right\|_X \end{aligned}$$

于是有:

$$\overline{\lim}_{n,m} \left\| \int f \xi_n(d\omega) - \int f \xi_m(d\omega) \right\|_X \leq \Lambda \cdot \|f - f_{k_j}\|.$$

其中 $\Lambda = 2 \sup N(\xi_k) < \infty$, 令 $j \rightarrow \infty$ 得:

$$\overline{\lim}_{n,m} \left\| \int f \xi_n(d\omega) - \int f \xi_m(d\omega) \right\|_X = 0$$

所以 $\forall f \in c(\Omega), \lim \int f \xi_n(d\omega)$ 存在, 令:

$$L(f) = \lim \int f \xi_n(d\omega) \quad \forall f \in c(\Omega).$$

那么 L 是 $c(\Omega)$ 到 X 的线性算子, 由引理 6 存在唯一的 X -值测度 ξ , 使得: $\forall f \in c(\Omega), L(f) = \int f \xi(d\omega)$, 特别地对 $f_n, n \geq 1$ 有: $\int f_n \xi(d\omega) = L(f_n) = \lim \int f_n \xi_k(d\omega) = x_n$, 于是: $T(\xi) = (x_1, x_2, \dots)$. 所以 $T(\xi_n) \rightarrow T(\xi) \in T(M)$, 即 $T(M)$ 是 X^∞ 的一闭子集, 充分性得证.

必要性: 假设 M 是一紧距离空间, 不妨取定 $x_0^* \in X^*$, 且 $x_0^*(e) = 1$. 而将 x_0^* 视为 M 到 m 的线性算子, 由引理 2 知, x_0^* 是一连续性算子. 因此 $x_0^*(M) = \{x_0^* \xi; \xi \in M\} \subset m$, 是 m 的一相对紧子集, 又由 $\{e I_{(\omega)}; \omega \in \Omega\} \subset M$ 知, $\{I_{(\omega)}; \omega \in \Omega\} \subset x_0^*(M)$ 但是 $\{I_{(\omega)}; \omega \in \Omega\}$ 是 m 的一闭子集, 故为一紧集, 同时, Ω 又同胚于 $\{I_{(\omega)}; \omega \in \Omega\}$, 所以 Ω 是一紧距离空间.

参 考 文 献

- 1 Lewis D R. Integration with respect to vector measures. Pacific J of math, 1970, 33 (1): 157 ~165
- 2 Masani P, Niemi H. An outline of the integration theory of Banach space valued measures. Lecture Notes in Math, 1987, Vol. 1391
- 3 Parthasarathy K R. Probability measures on metric space. New York and London: Academic Press INC, 1967

Weak Topology on the Space of Banach Space Valued Measures on the Metric Space

Wang Hanxing *

Abstract The properties of the weak topology on the space of Banach space valued measures have been reserched. Sufficient and necessary conditions that the weak topological space can be a seperable metric space, and that the weak topological space can be a compact metric space, are given respectively in theorem1 and theorem 2. Similar results about probability meaures are thus generalized.

Keywords probabity measures, vector measures, seperable spaces, compact spaces

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275