第32卷 第1期 1993年

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.32 No.1 1993

解双调和问题的基于Adini元的广义差分法

陈 仲 英

(中山大学计算机科学系)

摘 要 提出一种求解双调和问题的基于Adini元的非协调广义差分法，作出误差估计，并给出数值例子，数值效果良好。

关键词 双调和问题，Adini元，广义差分法

1 广义差分格式

考虑双调和算子的Dirichlet问题：

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在}\Omega\text{内} \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω为具有Lipschitz-连续边界$\partial\Omega$的平面有界区域，$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$为外法向导算子，$f \in L^2(\Omega)$。

在$\overline{\Omega}$上作剖分σ，把$\overline{\Omega}$分割成有限个具有Lipschitz-连续边界、内部非空且相互间无公共内点的闭子集之和。集$S_\sigma(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); v|_{\overset{\circ}{K}} \in P_1, \forall K \in \sigma\}$为相应于剖分$\sigma$的分片线性函数类。任取$v \in S_\sigma(\Omega)$，乘以方程两边，再在$\Omega$上积分，然后在每个$K$上应用Green公式，得到问题(1)的如下变分形式：求$u \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$使

$$a_\sigma(u, v) = (f, v), \ \forall v \in S_\sigma(\Omega), \ \sigma \in \{\sigma\} \tag{2}$$

其中

$$a_\sigma(u, v) = \int_\Omega \Delta^2 u v \, dx dy = \sum_{K \in \sigma} \int_{\partial K} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v - \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) ds,$$

$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$和$\dfrac{\partial}{\partial \tau}$分别为沿$K$的边界$\partial K$的外法向导算子和切向导算子，$v$在$\partial K$上的值理解为$v|_{\overset{\circ}{K}}$在$\partial K$上的连续延拓。由$\overline{\cup S_\sigma} = L^2(\Omega)$可知(1)、(2)还是等价的。

假设闭区域$\overline{\Omega}$的所有边分别平行于某一坐标轴，从而可用Adini矩形作出的剖分T_h覆

本文1991年9月4日收到

盖$\overline{\Omega}$。以h表示最大的单元直径。矩形的顶点称为节点，全体节点组成的集合记为$\dot{\Omega}_h$。试探函数空间U_h取为Adini矩形的有限元空间，其函数u_h在任一边界节点P_0上满足

$$u_h(P_0)=\frac{\partial u_h(P_0)}{\partial x}=\frac{\partial u_h(P_0)}{\partial y}=0 .$$

在每个矩形单元内作对边中点连线，所有矩形的对边中点连线把$\overline{\Omega}$重新分割成另一些小矩形或小多边形之和.每个T_h的节点P_0都有一个围绕它的小矩形(对于边界节点也可能是小多边形)，称之为对偶单元，记为$K^*_{P_0}$(图1)。所有对偶单元构成$\overline{\Omega}$的对偶剖分，记为T^*_h。检验函数空间V_h取为相应于T^*_h的分片线性函数空间，相应于T_h的每个节点$P_0(x_0,\ y_0)$有3个基函数:

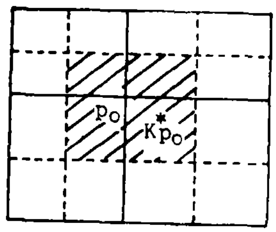

图1　对偶单元
Fig.1　Dual elemnet

$$\Psi^{(0)}_{P_0}(P)=\begin{cases}1, & P\in K^*_{P_0},\\ 0, & P\overline{\in} K^*_{P_0},\end{cases}$$

$$\Psi^{(1)}_{P_0}(P)=\begin{cases}x-x_0, & P\in K^*_{P_0},\\ 0, & P\overline{\in} K^*_{P_0},\end{cases}\qquad \Psi^{(2)}_{P_0}(R)=\begin{cases}y-y_0, & P\in K^*_{P_0},\\ 0, & P\overline{\in} K^*_{P_0}.\end{cases}$$

$v_h\in V_h$在边界节点P_0上也满足$v_h(P_0)=\dfrac{\partial v_h(P_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial v_h(P_0)}{\partial y}=0$。

基于变分形式(2)，定义求解问题(1)的广义差分格式为：求$u_h\in U_h$，使得

$$a_h(u_h,\ v_h)=(f,\ v_h),\qquad \forall v_h\in V_h \tag{3}$$

其中(用$\dot{K}$表示单元K的顶点组成的集合)，

$$a_h(u_h,\ v_h)=\sum_{K\in T_h} I_K(u_h,\ v_h) \tag{4}$$

$$I_K(u_h,\ v_h)=\sum_{P\in\dot{K}}\int_{\partial K^*_P\cap K}\left(\frac{\partial\Delta u_h}{\partial\nu}v_h-\Delta u_h\frac{\partial v_h}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 u_h}{\partial\tau^2}\frac{\partial v_h}{\partial\nu}-\frac{\partial^2 u_h}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial v_h}{\partial\tau}\right)ds \tag{5}$$

通过计算$I_K(u_h,\ \Psi^{(l)}_{P_0})$ $(l=0,1,2)$可得单元矩阵，再叠加合成总体矩阵，就得到离散问题的代数方程组。由于所计算的只是一些积分路径与坐标轴平行的线积分，且检验函数空间的基函数$\Psi^{(l)}_{P_0}$极其简单，I_K中许多项为零，非零项的计算也相当简便，因而比之非协调有限元方法，更具单元矩阵计算的简洁性。

2　误差分析

任取一矩形单元$K\in T_h$，设其顶点为$P_m(x_m,\ y_m)(m=i,\ j,k,l)$，各边中点为$M_{ij}$，

M_{jk}，M_{kl}，M_{li}，重心为Q（图2（a）），面积为S_K。记$\Delta x=|P_iP_j|$，$\Delta y=|P_iP_k|$，$\lambda_K=(\Delta y/\Delta x)^2$。令

$$\xi=(x-x_i)/\Delta x,\quad \eta=(y-y_i)/\Delta y,$$

矩形K变为单位正方形$\hat{K}=[0,1;\ 0,1]$，相应各点P_i，M_{ij}，Q，…映为$\hat{P}_i$，$\hat{M}_{ij}$，$\hat{Q}$，…（图2（b））。

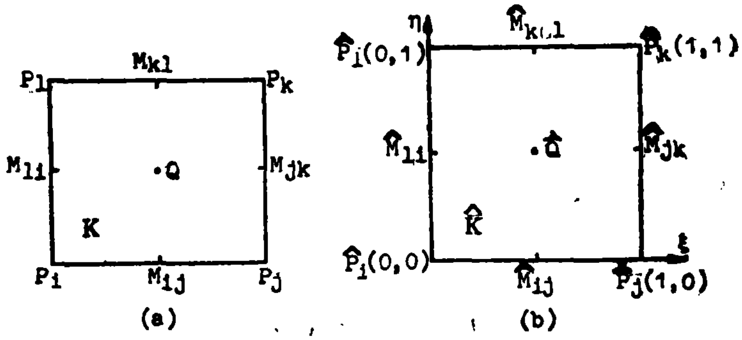

图2　矩形单元K和参考元$\hat{K}$

Fig.2 Rectangular element K and reference finite element $\hat{K}$

在U_h空间引进一个范数。令

$$\|u_h\|_h=\Big(\sum_{K\in T_h}\frac{1}{S_K}\delta_K(u_h)^T\delta_K(u_h)\Big)^{1/2}\tag{6}$$

其中　$\delta_K(v)=\Big[v_i-v_j+v_k-v_l,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\Big)_i+v_i-v_j,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\Big)_j+v_i-v_j,$

$\Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\Big)_k+v_l-v_k,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\xi}\Big)_l+v_l-v_k,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\eta}\Big)_i+v_i-v_l,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\eta}\Big)_j+v_j-v_k,$

$\Big(\frac{\partial v}{\partial\eta}\Big)_k+v_j-v_k,\ \Big(\frac{\partial v}{\partial\eta}\Big)_l+v_i-v_l\Big]^T$（记号$v_i=v(P_i)$，余类推）。

定理1　设剖分T_h是正则的，存在$\lambda_0>0$使　$\lambda_0\leqslant\lambda_K\leqslant\lambda_0^{-1}$（$K\in T_h$），则$\|u_h\|_h$与如下范数

$$|u_h|_{2,h}=\Big(\sum_{K\in T_h}|u_h|^2_{2,K}\Big)^{1/2}\tag{7}$$

等价，即存在与子空间U_h无关的常数c_1，$c_2>0$使

$$c_1\|u_h\|_h\leqslant|u_h|_{2,h}\leqslant c_2\|u_h\|_h,\quad \forall u_h\in U_h\tag{8}$$

证明　只需证明存在与U_h和K无关的常数c_1'　$c_2'>0$使得

$$\frac{c_1'}{S_K}\delta_K(u_h)^T\delta_K(u_h)\leqslant|u_h|^2_{2,K}\leqslant\frac{c_2'}{S_K}\delta_K(u_h)^T\delta_K(u_h),\quad \forall u_h\in U_h,\ K\in T_h\tag{9}$$

将$\frac{\partial^2u_h}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2u_h}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2u_h}{\partial y^2}$表为向量与矩阵乘积的形式

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\ \frac{\partial^2 u_h}{\partial \xi^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\ (\xi\eta,\xi,\eta,1)\ G_1\delta_K(u_h),$$

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x\partial y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\ \frac{\partial^2 u_h}{\partial \xi\partial\eta}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\ (\xi^2,\eta^2,\xi,\eta,1)\ G_2\delta_K(u_h),$$

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta y^2}\ \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta y^2}\ (\xi\eta,\xi,\eta,1)\ G_3\delta_K(u_h),$$

计算易得

$$|u_h|^2_{2,K}=\iint_{\hat K}\left[\frac{1}{\Delta x^4}\left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial \xi^2}\right)+\frac{1}{\Delta x^2\Delta y^2}\left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2+\frac{1}{\Delta y^4}\left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial \eta^2}\right)^2\right]\Delta x\Delta y\,d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{S_K}\delta_K(u_h)^T G^T\mathrm{diag}(\lambda_K D_0,D_1,\ \lambda_K^{-1}D_0)G\delta_K(u_h)\tag{10}$$

其中

$$D_0=\iint_{\hat K}(\xi\eta,\ \xi,\ \eta,\ 1)\ (\xi\eta,\ \xi,\ \eta,\ 1)^T d\xi d\eta,$$

$$D_1=\iint_{\hat K}(\xi^2,\eta^2,\xi,\eta,1)(\xi^2,\eta^2,\xi,\eta,1)^T d\xi d\eta,\qquad G^T=\left[G_1^T\,G_2^T\,G_3^T\right].$$

容易验证D_0，D_1为正定矩阵，G为高矩阵（满列秩），再注意正则性条件可知（9）式成立。证毕。

定义空间U_h到V_h的插值算子Γ_h：

$$\forall w_h\in U_h,\ \Gamma_h w_h=\sum_{P_0\in\dot\Omega}\left[w_h(P_0)\Psi^{(0)}_{P_0}+\frac{\partial w_h(P_0)}{\partial x}\Psi^{(1)}_{P_0}+\frac{\partial w_h(P_0)}{\partial y}\Psi^{(2)}_{P_0}\right]\tag{11}$$

定理 2 设剖分T_h满足$\frac{2}{3}\leqslant\lambda_K\leqslant\frac{3}{2}$（$K\in T_h$），则双线性形式$a_h(u_h,\ \Gamma_h w_h)$是一致$U_h$-椭圆的：存在与子空间$U_h$无关的常数$\alpha>0$使得

$$a_h(u_h,\Gamma_h u_h)\geqslant\alpha|u_h|^2_{2,h},\qquad \forall u_h\in U_h\tag{12}$$

证明 计算$I_K(u_h,\Gamma_h u_h)$并写成如下对称形式

$$I_K(u_h,\ \Gamma_h u_h)=\frac{1}{8S_K}\delta_K(u_h)^T A_K\delta_K(u_h)\tag{13}$$

其中A_K为如下对称矩阵：（下面用λ简记λ_K，并记$\mu=\lambda^{-1}$）

$$\begin{pmatrix}
16 & -\lambda-2 & -\lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 & -2-\mu & 2+\mu & 2+\mu & -2-\mu\\
 & 12\lambda+3 & 6\lambda-1 & 2\lambda+1 & 4\lambda-3 & 2\lambda+4+2\mu & -2\lambda-2+\mu & \lambda+\mu & -\lambda+2+2\mu\\
 & & 12\lambda+3 & 4\lambda-3 & 2\lambda+1 & 2\lambda+2-\mu & -2\lambda-4-2\mu & \lambda-2-2\mu & -\lambda-\mu\\
 & & & 12\lambda+3 & 6\lambda-1 & \lambda+\mu & -\lambda+2+2\mu & 2\lambda+4+2\mu & -2\lambda-2+\mu\\
 & & & & 12\lambda+3 & \lambda-2-2\mu & -\lambda-\mu & 2\lambda+2-\mu & -2\lambda-4-2\mu\\
 & & & & & 3+12\mu & -3+4\mu & 1+2\mu & -1+6\mu\\
 & & & & & & 3+12\mu & -1+6\mu & 1+2\mu\\
 & & & & & & & 3+12\mu & -3+4\mu\\
 & & & & & & & & 3+12\mu
\end{pmatrix}$$

令

$$\hat{A}_K = A_K|_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 16 & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{16}\hat{A}_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

作合同变换$B_K = Q_1^T A_K Q_1$。再令

$$\hat{B}_K = B_K|_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_{22} & \hat{B}_{23} \\ 0 & \hat{B}_{32} & \hat{B}_{33} \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & -\hat{B}_{22}^{-1}\hat{B}_{23} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

（此处$\hat{B}_{22}^{-1}$存在），对B_K作合同变换得

$$C_K = Q_2^T B_K Q_2 = Q_2^T Q_1^T A_K Q_1 Q_2 = \left[\ C_{ij}\ \right] \tag{14}$$

容易计算并估得

$$C_{11} - \sum_{j\neq 1}|C_{1j}| = 6.8363\lambda + 13.1636 - 4\lambda^{-1} \geqslant 11.72,$$

$$C_{ii} - \sum_{j\neq i}|C_{ij}| \geqslant 5.2989\lambda + 4.3386 - 4.8125\lambda^{-1} - 0.05 \geqslant 0.6524\ (i = 2,3,4,5),$$

$$C_{ii} - \sum_{j\neq i}|C_{ij}| \geqslant 5.7058\lambda + 0.2446 - 2.4489\lambda^{-1} - 0.05 \geqslant 0.3252\ (i = 6,7,8,9).$$

由Gerschgorin定理知C_K的最小特征值$\geqslant 0.3252$.这样，由(13)，(14)知有常数$\alpha' > 0$使得

$$I_K(u_h,\ \Gamma_h u_h) \geqslant \frac{0.3252}{8\,S_K}\delta_K(u_h)^T(Q_2^{-1}Q_1^{-1})^T(Q_2^{-1}Q_1^{-1})\delta_K(u_h)$$

$$\geqslant \frac{\alpha'}{S_K}\delta_K(u_h)^T\delta_K(u_h),\quad \forall u_h \in U_h.$$

再由(6)和定理1知结论成立。证毕。

离散问题(3)的解的存在性和和唯一性由定理2即得。

为进行误差估计，引进双线性插值算子Λ_h:

$$\forall K \in T_h,\ w_h \in U_h,\ \Lambda_h w_h(P_0) = w_h(P_0)\ (P_0 \in \dot{K}),\ \Lambda_h w_h|_K \in Q_1(K).$$

引理1　对任意$w_h \in U_h$，在每个$K \in T_h$上，

$$|\Gamma_h w_h - \Lambda_h w_h| \leqslant Ch|w_h|_{2,K} \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma_h w_h - \Lambda_h w_h)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_h w_h - \Lambda_h w_h)\right| \leqslant C|w_h|_{2,K} \tag{16}$$

其中C为与子空间U_h和单元K无关的常数。

证明　设K为图2(a)所示矩形$P_iP_jP_kP_l$。在$K_{P_i}^* \cap K$上，

$$\Gamma_h w_h - \Lambda_h w_h = \left[\left(\frac{\partial w_h}{\partial \xi}\right)_i + (w_h)_i - (w_h)_j\right]\xi + \left[\left(\frac{\partial w_h}{\partial \eta}\right)_i + (w_h)_i - (w_h)_l\right]\eta$$

$$+ \left[(w_h)_i - (w_h)_j + (w_h)_k - (w_h)_l\right]\xi\eta,$$

由上式并注意(9)式可知结论成立。证毕。

下面以u_h记广义差分格式(3)的解，作误差估计。

定理 3 设剖分T_h满足$\frac{2}{3}\leqslant\lambda_K\leqslant\frac{3}{2}$ ($K\in T_h$)，问题(1)的弱解 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$，则

$$|u-u_h|_{2,h}\leqslant Ch\left(|u|_3+h|f|_0\right) \tag{17}$$

其中C是与子空间U_h无关的常数。

证明 设Π_h为U_h－插值算子。记$w_h=u_h-\Pi_h u\in U_h$。由一致椭圆性(12)和广义差分问题(3)，

$$\alpha|u_h-\Pi_h u|_{2,h}^2\leqslant a_h(u_h-\Pi_h u,\ \Gamma_h(u_h-\Pi_h u))$$

$$=(f,\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)+(f,\Lambda_h w_h)-a_h(\Pi_h u,\Gamma_h w_h) \tag{18}$$

因$u\in H^3(\Omega)$，故$\Delta^2 u\in H^{-1}(\Omega)$。据弱解的意义和Green公式，对任意$v\in\mathscr{D}(\Omega)$[2,3] (从而对任 $v=\Lambda_h w_h\in H_0^1(\Omega)$)，

$$(f,v)=(\Delta^2 u,v)=-\int_\Omega\nabla\Delta u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{19}$$

在每个$K^*\in T_h^*$上用Green公式，注意$\Gamma_h w_h|_{K^*}\in P_1(K^*)$，

$$\sum_{K^*\in T^*_h}\int_{K^*}\nabla\Delta u\cdot\nabla\Gamma_h w_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{K^*\in T^*_h}\int_{\partial K^*}\Delta u\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}\mathrm{d}s \tag{20}$$

由(4)式，

$$a_h(\Pi_h u,\ \Gamma_h w_h)=\sum_{K\in T_h}\ \sum_{P\in\dot{K}}\int_{\partial K_P^*\cap K}\left(\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial\nu}\Gamma_h w_h-\Delta\Pi_h u\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\Pi_h u}{\partial\tau^2}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}-\frac{\partial^2\Pi_h u}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}s \tag{21}$$

在每一$K\cap K^*_P(K\in T_h,P\in\dot{K})$上用Green公式有：

$$\int_{\partial(K\cap K_P^*)}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\frac{\partial v}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\int_{K\cap K_P^*}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

取$v=\Gamma_h w_h$则上式右端为零，从而

$$\sum_{K^*\in T^*_h}\int_{\partial K^*}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\tau}\right)\mathrm{d}s=0 \tag{22}$$

上式最后的等式是因为被积函数的连续性和边界条件使得不论K的边界是相邻元素的公共边还是$\partial\Omega$的一部分，线积分的贡献为零。

联合(18)～(22)得到

$$\alpha|u_h-\Pi_h u|_{2,h}^2\leqslant(f,\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)+\sum_{i=1}^4\sum_{K\in T_h}E_i^K(u,w_h) \tag{23}$$

其中

$$E_1^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{K\cap K_P^*}\nabla\Delta u\cdot\nabla(\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E_2^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{\partial K_P^*\cap K}-\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial\nu}\Gamma_h w_h\mathrm{d}s,$$

$$E_3^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{\partial K_P^*\cap K}\left[-\Delta(u-\Pi_h u)+\frac{\partial^2(u-\Pi_h u)}{\partial\tau^2}\right]\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\nu}\mathrm{d}s,$$

$$E_4^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{\partial K_P^*\cap K}-\frac{\partial^2(u-\Pi_h u)}{\partial\nu\partial\tau}\frac{\partial\Gamma_h w_h}{\partial\tau}\mathrm{d}s.$$

现在逐项进行估计。据Cauchy不等式和引理1(15),(16)式，

$$|(f,\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)|\leqslant|f|_0\Big(\sum_{K\in T_h}\int_K|\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant Ch^2|f|_0|w_h|_{2,h}\tag{24}$$

$$|E_1^K(u,w_h)|\leqslant Ch|u|_{3,K}|w_h|_{2,K}\tag{25}$$

易见 $$E_2^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{\partial K_P^*\cap K}-\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial\nu}(\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)\mathrm{d}s.$$

记$\varphi=\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial\nu}$，用(15)式有

$$|E_2^K(u,w_h)|\leqslant\sum_{P\in K}\Big(\int_{\partial K_P^*\cap K}|\varphi|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\Big(\int_{\partial K_P^*\cap K}|\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant Ch^{3/2}|w_h|_{2,K}\sum_{P\in K}\Big(\int_{\partial K_P^*\cap K}|\varphi|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\tag{26}$$

考虑

$$\int_{\partial K_{P_i}^*\cap K}|\varphi|^2\mathrm{d}s=\int_{M_{ij}Q}|\varphi|^2\mathrm{d}s+\int_{QM_{li}}|\varphi|^2\mathrm{d}s.$$

在$M_{ij}Q$上$\varphi=\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial x}$只含变量$y$而与变量$x$无关，从而

$$\int_{M_{ij}Q}|\varphi|^2\mathrm{d}s=\frac{2}{\Delta x}\int_{K_{P_i}^*\cap K}\left|\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant Ch^{-1}|u|_{3,K}^2,$$

在QM_{li}上$\varphi=\frac{\partial\Delta\Pi_h u}{\partial y}$不含变量$y$从而也有相同的估计式。这样由(26)式就得到

$$\left|E_2^K(u,w_h)\right|\leqslant Ch|u|_{3,K}|w_h|_{2,K}\tag{27}$$

对$E_3^K(u,w_h)$类似也有

$$E_3^K(u,w_h)=\sum_{P\in K}\int_{\partial K_P^*\cap K}\left[-\Delta(u-\Pi_h u)+\frac{\partial^2(u-\Pi_h u)}{\partial\tau^2}\right]\cdot\frac{\partial(\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)}{\partial\nu}\mathrm{d}s.$$

记 $\phi=-\Delta(u-\Pi_h u)+\dfrac{\partial^2(u-\Pi_h u)}{\partial\tau^2}$，$L_P=\partial K_P^*\cap K$，用(16)式有

$$|E_3^K(u,w_h)|\leqslant\sum_{p\in\dot K}\left(\int_{L_p}|\phi|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_{L_p}\left|\frac{\partial(\Gamma_h w_h-\Lambda_h w_h)}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

$$\leqslant Ch^{1/2}|w_h|_{2,K}\sum_{p\in\dot K}\left(\int_{L_p}|\phi|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\tag{28}$$

在变换$(x,y)\to(\xi,\eta)$之下，单元K变为参考元$\hat K$，K上函数ϕ变为$\hat K$上函数 $\hat\phi(\xi,\eta)=\phi(x,y)$。在此变量替换下，

$$\int_{L_p}|\phi|^2\mathrm{d}s\leqslant h\int_{\hat L_p}|\hat\phi|^2\mathrm{d}\hat s\tag{29}$$

据迹定理可知存在常数C（与K无关）使

$$\int_{\hat L_p}|\hat\phi|^2\mathrm{d}\hat s\leqslant C\|\hat\phi\|^2_{1,\hat K}\tag{30}$$

据ϕ和$\hat\phi$之间的Sobolev半范数的关系[3]有常数C使得

$$|\hat\phi|_{0,\hat K}\leqslant Ch^{-1}|\phi|_{0,K},\qquad|\hat\phi|_{1,\hat K}\leqslant C|\phi|_{1,K}\tag{31}$$

由(29)～(31)得

$$\left(\int_{L_p}|\phi|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant Ch^{1/2}(h^{-1}|\phi|_{0,K}+|\phi|_{1,K})\leqslant Ch^{1/2}|u|_{3,K}\tag{32}$$

由(28)，(32)就有

$$|E_3^K(u,w_h)|\leqslant Ch|u|_{3,K}|w_h|_{2,K}\tag{33}$$

同样可证

$$|E_4^K(u,w_h)|\leqslant Ch|u|_{3,K}|w_h|_{2,K}\tag{34}$$

由(23)～(25)，(27)，(33)，(34)就得到

$$|u_h-\Pi_h u|_{2,h}\leqslant Ch(|u|_3+h|f|_0).$$

再用标准估计式$|u-\Pi_h u|_{2,h}\leqslant Ch|u|_3$，就得到(17)式。证毕。

3 数值试验

用本文格式(3)解下列双调和问题：

$$\begin{cases}\Delta^2u=16\cos2x\cos2y-4\cos2x-4\cos2y，在\Omega中\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0，在\partial\Omega上\end{cases}\tag{35}$$

其中$\Omega=(0,\pi)\times(0,\pi)$。

将Ω划分成边长为$h=\pi/16$的正方形网格，用格式(3)得出离散方程，再用Seidel 迭

代法解所得代数方程组，所得数值结果与精确解$u=\sin^2 x\sin^2 y$进行比较（表1），其中 $x_i=i\pi/8$，$y_j=j\pi/8$。由表1可见，函数值的相对误差小于0.5%。

表1　数值结果表

Tab.1 Numerical Results

(x,y)	u_h	u_h-u	$\frac{\partial u_h}{\partial x}$	$\frac{\partial u_h}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u_h}{\partial y}$	$\frac{\partial u_h}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}$
(x_1,y_1)	0.02135	−0.00010	0.10306	−0.00049	0.10306	−0.00069
(x_1,y_2)	0.07289	−0.00033	0.35232	−0.00123	0.14589	−0.00056
(x_1,y_3)	0.12448	−0.00051	0.60188	0.00168	0.10326	−0.00079
(x_1,y_4)	0.14587	−0.00058	0.70529	−0.00181	−0.00001	−0.00001
(x_2,y_2)	0.24924	−0.00076	0.49923	−0.00077	0.49921	−0.00079
(x_2,y_3)	0.42583	−0.00095	0.85314	−0.00041	0.35334	−0.00022
(x_2,y_4)	0.49901	−0.00099	0.99983	−0.00017	−0.00004	−0.00004
(x_3,y_3)	0.72764	−0.00091	0.60391	0.00036	0.60387	0.00032
(x_3,y_4)	0.85272	−0.00083	0.70774	0.00063	−0.00006	−0.00006
(x_4,y_4)	0.99932	−0.00068	−0.00002	−0.00002	−0.00006	−0.00006

参 考 文 献

1 李荣华等。高等学校计算数学学报。1982，2：140～152

2 石钟慈。计算数学。1990，12(2)：113～118

3 Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam, 1978. 112～126, 362～376

The Generalized Difference Method Based on Adini's Element for Biharmonic Equation

*Chen Zhongying**

Abstract A nonconforming generalized difference method based on Adini's element is presented for the homogeneous Dirichlet problem of biharmonic operator. The error estimate is obtained and a numerical example is given.

Keywords biharmonic equation, Adini's element, generalized difference method

* Department of Computer Science, Zhongshan University