第32卷 第3期 1993年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 No.3 1993

流动稳定性O-S方程的CHEBYSHEV多项式方法*

田 川 张涤明
（中山大学应用力学与工程系）

摘 要 对O-S方程Chebyshev多项式展开法数值求解进行了某些修正，并同其它几种求解流动稳定性O-S方程的数值方法进行了比较，结果表明，应用Chebyshev多项式展开法在计算结果精度方面有很大的优越性。

关词键 流动稳定性，O-S方程，数值方法

对于平面Poiseuille流的流动稳定性O-S方程的求解，THOMAS[1]（1953）用四阶差分系统代替四阶微分方程的有限差分法，其截断误差包含八阶导数，故需一较大的计算区间方可克服，因而对雷诺数引起的误差指数增长的控制效果有限，周恒等[2]（1982）认为Numerov差分法是一种较好的方法，但其结果的精度依赖于参数的选取；张涤明等1)（1987）用差分坐标变换法得到了好的效果，但却限制雷诺数不超过5000。总之，上述方法均受到两方面的限制：雷诺数不能很大，方法不能广泛适用。DAVEY[3]（1973）的打靶法（完全正交化方法），虽可用到雷诺数很大的情况，而且可较普遍地适用于高阶线性常微分方程的本征值问题，但有计算总体传递矩阵带来的缺点，而且不适于计算本征函数；张涤明等2)（1989）的改进型完全正交化方法有效地解决了这两个问题，但仍要计算每节内分点间的传递矩阵，故仍有误差积累。

目前，关于N-S方程直接数值模拟用得最多的方法是谱方法，其优点体现在两个方面：①精度高。因为在理论上一个无穷可微的周期函数的第K项FOURIER系数比K的任何负幂次方都衰减得快。②有准确的空间微分。因为对空间坐标的微分可在谱空间中的解析方式准确地求得，因而不存在数值粘性。据此，对二维扰动速度O-S方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^4v}{dy^4}-2\alpha^2\dfrac{d^2v}{dy^2}+\alpha^4v-i\alpha R[(\bar{u}-\lambda)(\dfrac{d^2v}{dy^2}-\alpha^2v)-\dfrac{d^2\bar{u}}{dy^2}v]=0 \\ v(y)=0 \qquad 在y=\pm 1 \\ v'(y)=0 \qquad 在y=\pm 1\end{cases} \tag{1}$$

寻求如下形式的解

本文1992年9月16日收到
中山大学高等学术研究基金资助课题

1）张涤明，詹杰民。求解O-S流动稳定性方程的高阶差分坐标变换方法。1987

2）张涤明等。非线性偏微分方程稳定性及其应用论文集，1989年12月，68～78

$$v(y)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(y) \tag{2}$$

这里$T_n(y)$为CHEBYSHEV多项式。

将(2)式代入(1)式，按CHEBYSHEV多项式展开(1)的左边，由方程中$T_n(y)$的系数为零可得一系列方程，具体方法如下

$$\because\quad v(y)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(y)$$

$$\left.\begin{aligned}&\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^qv}{\mathrm{d}y^q}=\sum_{n=0}^{N}a_n^{(q)}T_n(y)\\&\text{而}\quad a_n^{(0)}=a_n\end{aligned}\right\} \tag{A1}$$

又 $\quad Tn(\cos\theta)=\cos n\theta$

有 $$\frac{C_n}{n+1}T'_{n+1}(x)-\frac{d_{n-2}}{n-1}T'_{n-1}(x)=2T_n(x) \tag{A2}$$

其中 $$C_n=\begin{cases}0 & n<0\\2 & n=0\\1 & n>0\end{cases}\qquad d_n=\begin{cases}0 & n<0\\1 & n=0\\1 & n>0\end{cases}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(q-1)}T_n(y)=\frac{\mathrm{d}^qv}{\mathrm{d}y^q}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(q)}T_n(y)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(q)}\left[\frac{Cn}{n-1}T_{n+1}(y)-\frac{d_{n-2}}{n-1}T_{n-1}(y)\right]$$

$\therefore$ 按$T_n(y)$的系数相等，对$n\geqslant1$有

$$C_{n-1}a_{n-1}^{(q)}-a_{n+1}^{(q)}=2na_n^{(q-1)}\qquad(n\geqslant1) \tag{A3}$$

由(A3)可得 $\quad C_na_n^{(1)}-a_{n+2}^{(1)}=2(n+1)a_{n+1}$

而 $\quad C_{n+2},\ \cdots,\ C_{n+2k}=1$

$$\therefore\quad C_n\ a_n^{(1)}=2\sum_{\substack{p=n+1\\p+n=1\ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty}p\ a_p\qquad(n\geqslant0) \tag{A4}$$

由(A3)式和(A4)式可得

$$C_n\ a_n^{(2)}=\sum_{\substack{p=n+2\\p=n\ (\mathrm{mod}\ 2)}}^{\infty}p(p^2-n^2)a_p \tag{A5}$$

同样可得

$$C_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24}\sum_{p=n+4}^{\infty} p[p^2(p^2-4)^2 - 3n^2p^4 + 3n^4p^2 - n^2(n^2-4)^2]a_p \tag{A6}$$

由递归关系式

$$2xT_n(x) = C_nT_{n+1}(x) + d_{n-1}T_{n-1}(x)$$

∴　$2y\ v(y)$的n阶CHEBYSHEV系数为

$$C_{n-1}a_{n-1} + a_{n+1} \tag{A7}$$

$4y^2v(y)$的n阶CHEBYSHEV系数为

$$C_{n-2}a_{n-2} + (C_n + C_{n-1})a_n + a_{n+2} \tag{A8}$$

综合(A5)～(A8)，及$\bar{u}=1-y^2$，将(2)式代入(1)式后可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24}\sum_{\substack{p=n+4\\ p\equiv n\ (\mathrm{mod}\,2)}}^{N}[p^3(p^2-4)-3n^2p^5+3n^4p^3-pn^2(n^2-4)^2]a_p\\
&-\sum_{\substack{p=n+2\\ p\equiv n\ (\mathrm{mod}\,2)}}^{N}\{[2\alpha^2+\frac{1}{4}i\alpha R(4-4\lambda-C_n-C_{n-1})]p(p^2-n^2)\\
&-\frac{1}{4}i\alpha RC_np[p^2-(n+2)^2]-\frac{1}{4}i\alpha Rd_{n-2}p[p^2-(n-2)^2]\}a_p\\
&+i\alpha Rn(n-1)a_n+\{\alpha^4+i\alpha R[(1-\lambda)\alpha^2-2]\}C_na_n\\
&-\frac{1}{4}i\alpha^3R[C_{n-2}a_{n-2}+C_n(C_n+C_{n-1})a_n+C_na_{n+2}]=0
\end{aligned} \tag{3}$$

边条件为

$$\sum_{\substack{n=0\\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)}}^{N}a_n=0,\qquad \sum_{\substack{n=0\\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)}}^{N}n^2a_n=0 \tag{4}$$

这里对边条件的取舍已考虑到只有对称的特征值才可能出现不稳定性这一点。

选$n=2M$，于是共有$M+1$个未知数$a_{2n}(n=0,1,\cdots,M)$。将$N=0,1,2,\cdots,M$代入(3)、(4)，可得到$M+3$个方程，为克服这一矛盾我们采用LANCZO[4]中所述τ方法，将此方法推广应用于本问题，对(3)式只代入$n=0,2,4,\cdots,M-4$，这样再加上两个边条件就只有$M+1$个方程，也就是说高阶的频率的特征不是由方程(3)而是由边条件(4)决定的，此时方程(1)右端可看作非零，而是$\tau_{n-2}T_{n-2}(y)+\tau_nT_n(y)+\tau_{n+2}\cdot T_{n+2}(y)$，参数$\tau_{n-2}$，$\tau_n$，$\tau_{n+2}$由$a_{2n}$来决定，接下来用$QR$矩阵法求特征值。

由计算结果可见（表1），特征值精确度很高，对弱不稳定的计算区域的计算可由极不稳定的计算区域来决定。ORSZAG[5]曾用CONTROL DATA 6600计算机，其结果有如下的缺点：因决定特征值的计算数达到n^3，故至少必须给CD 6600预订储存正比于n^2，实际用的是n^6。本工作用FORTRAN语言在FACOM-340机上进行运算，克服了存储问题，可选$M+1$为任何值，直到得出λ的值，又节约了CPU时间。

表1 部分结果展示 ($\alpha=1$, R=10000)
Tab. 1 Parts of results

Chebyshev多项式 M+1	CPU时间 (second)	特征值(round off≈10^{-14}) λ
12	0.27	0.23715678+0.00493333i
14	0.33	0.23618214+0.00376662i
17	0.39	0.23531301+0.00365538i
18	0.47	0.23891206+0.00375374i
20	0.66	0.23772637+0.00375059i
23	0.89	0.23969905+0.00374063i
26	1.34	0.23647777+0.00374012i
27	1.65	0.23746333+0.00373914i
29	1.77	0.23538243+0.00373903i
32	1.92	0.23625536+0.00373806i
38	2.43	0.23749429+0.00373807i
39	2.55	0.23752638+0.00373862i
41	2.68	0.23752666+0.00373967i
42	3.11	0.23752649+0.00373967i
43	4.06	0.23752649+0.00373967i

参 考 文 献

1 Thomas L H. Physical Review, 1953, 91(4)
2 Zhou H. On the Nonlinear Theory of Stability of Plane Poiseuille Flow in the Subcritical Range. Rrac R Soc Lond, 1982, A381: 407～418
3 Davey A. Appl Math, 1973, 26(4):401～411
4 Lanczos C. Applied Analysis. Prentice-Hall, 1956
5 Orszag S A. J Fluid Mech, 50(4):689～703

Advantages of Chebyshev Polynomial Method over the Other Several Methods in Solving the Flow-Stability O-S Equation

Tian Chuan Zhang Diming*

Abstract Some amendment is given to the Chebyshev polynomial expanding method in order to get the O-S equation numerical solution. We compare the chebyshev polynomial expanding mothod with some other numerical methods for solving flow stability O-S equation and find that the former has great advantages in the precision of the results.

Keyuords flow-stability, O-S equation, numerical method

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University