第 33 卷 第 4 期
1994 年 10 月

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 33 No. 4
Oct. 1994

广义差分法一次元格式的 L^2-估计*

陈 仲 英
（中山大学计算机科学系，广州 510275）

摘 要 讨论了一维和二维区域上二阶椭圆型微分方程，其边值问题广义差分法一次元格式的解按 L^2-范数的收敛阶，就重心对偶剖分的情形得到了最佳阶误差估计．进一步易得最大模估计，从而得到广义差分解的一致收敛性．所得结果也适用于某些二维区域外心对偶剖分的情形．

关键词 椭圆边值问题，广义差分法，L^2-估计
分类号 O241.1

自文〔1,2〕以来，人们对于广义差分法的研究已经取得了丰富的成果．但是对于一次元差分格式的 L^2-估计，由于检验函数空间仅为分片(段)常数函数类，运用 Nitsche 论证法遇到困难．文〔3〕曾给出敛速估计 $\| u-u_h \|_{0,2,\Omega} \leqslant Ch^{3/2}|u|_{2,p,\Omega}(p>2)$，但未得最佳收敛阶，论证中也存在一些问题．本文分别就一维和二维椭圆型方程探讨格式的 L^2-收敛阶估计，进而给出了最大模估计．

1 一维椭圆型方程一次元差分格式的 L^2-估计

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu=f, & a<x<b, \\ u(a)=0, \quad u'(b)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$p,q\in C^1[a,b]$，　$p(x)\geqslant p_{\min}>0$，　$q(x)\geqslant 0$，　$f\in L^2[a,b]$.

作区间 $I=[a,b]$ 的剖分 T_h，节点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

单元 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $h_i=x_i-x_{i-1}$. 记 $h=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$. 设剖分是正则的：存在常数 $\mu>0$，使得 $h_i\geqslant \mu h(i=1,2,\cdots,n)$. 试探函数空间 U_h 取为相应于 T_h 的一次元空间．再作对偶剖分 T_h^*，节点为

收稿日期：1993－11－30
* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

$$a=x_0<x_{\frac{1}{2}}<x_{\frac{3}{2}}<\cdots<x_{n-\frac{1}{2}}<x_n=b,$$

其中 $x_{j-\frac{1}{2}}=(x_{j-1}+x_j)/2(j=1,2,\cdots,n)$. 检验函数空间 V_h 取为相应于 T_h^* 的分段常数函数类，其基函数 $\psi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为对偶单元 $I_j^*=[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}]$ 的特征函数(规定 $x_{n+\frac{1}{2}}=x_n$).

广义差分法一次元格式为：求 $u_h\in U_h$，使得

$$a(u_h,\psi_j)=(f,\psi_j),\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $a(u,v)=\int_a^b(pu'v'+quv)\mathrm{d}x$ 按广义函数意义理解.

设 Π_1w 和 Π_2w 分别表示 $w\in H_E^1(I)=\{w\in H^1(I):w(a)=0\}$ 在 U_h 和 V_h 的插值投影．考察 $a(u_h,\Pi_2u_h)$ 的正定性．易见

$$\begin{aligned}a(u_h,\Pi_2u_h)&=\sum_{j=1}^n u_ja(u_h,\psi_j)\\&=\sum_{j=1}^n p_{j-\frac{1}{2}}(u_j-u_{j-1})^2/h_j+\sum_{j=1}^n q_ju_j^2(h_j+h_{j+1})/2\\&\quad+\sum_{j=1}^n u_j\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}(qu_h-q_ju_j)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3}$$

此处简记 $u_j=u_h(x_j)$，$p_{j-\frac{1}{2}}=p(x_{j-\frac{1}{2}})$　$(j=1,2,\cdots,n)$等．注意

$$\|u_h\|_0^2=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n(u_{j-1}^2+u_{j-1}u_j+u_j^2)h_j,\tag{4}$$

$$|u_h|_1^2=\sum_{j=1}^n\left(\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j}\right)^2h_j,\tag{5}$$

由(3)可得

$$a(u_h,\Pi_2u_h)\geqslant p_{\min}|u_h|_1^2-Ch\|u_h\|_0|u_h|_1.$$

因此存在 $h_0>0$，$\alpha>0$，使当 $0<h\leqslant h_0$ 时

$$a(u_h,\Pi_2u_h)\geqslant\alpha|u_h|_1^2,\quad\forall\ u_h\in U_h\tag{6}$$

定理 1　设 u 是问题(1)的广义解，u_h 是一次元差分格式(2)的解，则有如下估计：

$$|u-u_h|_1\leqslant Ch|u|_2,\tag{7}$$

$$\|u-u_h\|_0\leqslant Ch^2\|u\|_{3,1}.\tag{8}$$

证明　显然有误差方程：

$$a(u-u_h,\psi_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,n\tag{9}$$

据(6)，(9)有

$$|u_h-\Pi_1u|_1\leqslant\frac{1}{\alpha}\sup_{w_h\in U_h}\frac{|a(u-\Pi_1u,\Pi_2w_h)|}{|w_h|_1}\tag{10}$$

易得

$$\begin{aligned}a(u-\Pi_1u,\ \Pi_2w_h)&=\sum_{j=1}^n p_{j-\frac{1}{2}}(u-\Pi_1u)'_{j-\frac{1}{2}}(w_j-w_{j-1})\\&\quad+\sum_{j=1}^n w_j\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}q(u-\Pi_1u)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{11}$$

由中值定理存在 $\xi_0\in I_j$，使

$$u'(\xi_0)=(u_j-u_{j-1})/h_j,\quad \text{即}(u-\Pi_1 u)'(\xi_0)=0.$$

于是

$$|(u-\Pi_1 u)'_{j-\frac{1}{2}}|^2=\left|\int_{\xi_0}^{x_{j-\frac{1}{2}}}u''\mathrm{d}x\right|^2\leqslant h\int_{x_{j-1}}^{x_j}(u'')^2\mathrm{d}x \tag{12}$$

利用 Cauchy 不等式,(12),(5)和(4)可得

$$\left|\sum_{j=1}^{n}P_{j-\frac{1}{2}}(u-\Pi_1 u)'_{j-\frac{1}{2}}(w_j-w_{j-1})\right|\leqslant Ch|u|_2|w_h|_1$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}w_j\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}q(u-\Pi_1 u)\mathrm{d}x\right|\leqslant Ch|u|_2\|w_h\|_0$$

于是得

$$|a(u-\Pi_1 u,\Pi_2 w)|\leqslant Ch|u|_2|w_h|_1 \tag{13}$$

据(10),(13)及插值性质 $|u-\Pi_1 u|_1\leqslant Ch|u|_2$ 就得到(7).

为作 L^2-估计,引进辅助问题:对 $g=u-u_h\in H_E^1(I)$,求 $w\in H_E^1(I)$,使得

$$a(v,w)=(g,v),\quad \forall\, v\in H_E^1(I) \tag{14}$$

由微分方程理论可知问题(14)有唯一解,并且

$$\|w\|_2\leqslant C\|g\|_0 \tag{15}$$

由(14)及(9),

$$\|u-u_h\|_0^2=a(u-u_h,w-\Pi_1 w)+a(u-u_h,\Pi_1 w)-a(u-u_h,\Pi_2 w) \tag{16}$$

由(7)和(15)得

$$|a(u-u_h,w-\Pi_1 w)|\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0 \tag{17}$$

另方面,

$$\begin{aligned}&a(u-u_h,\Pi_1 w)-a(u-u_h,\Pi_2 w)\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(p-p_{j-\frac{1}{2}})(u-u_h)'\mathrm{d}x\frac{w_j-w_{j-1}}{h_j}+\sum_{j=1}^{n}p_{j-\frac{1}{2}}(u_j-u_{j-1}\\&\quad-h_ju'_{j-\frac{1}{2}})\frac{w_j-w_{j-1}}{h_j}\end{aligned} \tag{18}$$

利用(7)和(15)有

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}(p-p_{j-\frac{1}{2}})(u-u_h)'\mathrm{d}x\frac{w_j-w_{j-1}}{h_j}\right|\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0 \tag{19}$$

利用带积分型余项的 Taylor 公式可得

$$\left|\sum_{j=1}^{n}p_{j-\frac{1}{2}}(u_j-u_{j-1}-h_ju'_{j-\frac{1}{2}})\frac{w_j-w_{j-1}}{h_j}\right|\leqslant Ch^2|u|_{3,1}\|u-u_h\|_0 \tag{20}$$

综合(16)～(20)并注意嵌入 $W^{3,1}(I)\to H^2(I)$ 的连续性就得到(8). 证毕.

如同有限元方法那样,利用 L^2-估计容易导出 L^∞-估计,从而得到近似解到真解的一致收敛性.

定理2　在定理1的条件下,

$$\|u-u_h\|_{0,\infty}\leqslant Ch^{3/2}\|u\|_{3,1} \tag{21}$$

2　二维椭圆边值问题一次元差分格式的 L^2-估计

考虑二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j})+qu=f, & x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{22}$$

的广义差分法一次元格式：求 $u_h\in U_h$，使得

$$a(u_h,v_h)=(f,v_h),\ \forall\ v_h\in V_h \tag{23}$$

此处 $\bar{\Omega}$ 为凸多边形区域，系数函数 a_{ij}，q 充分光滑且满足椭圆性条件，$f\in L^2(\Omega)$，U_h 为相应于正则三角剖分 T_h 的一次元空间，V_h 为相应于重心对偶剖分 T_h^* 的分片常数函数空间[2]. 已经知道，(23)的解存在且唯一，并有 H^1-估计

$$|u-u_h|_1\leqslant Ch|u|_2.$$

下面作 L^2-估计.

引进辅助问题：求 $w\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$a(v,w)=(g,v),\quad \forall\ v\in H_0^1(\Omega) \tag{24}$$

据微分方程理论，问题(24)是正则的，即对任意 $g\in L^2(\Omega)$，存在唯一解 $w\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，且有常数 C 使得

$$\|w\|_{2,\Omega}\leqslant C\|g\|_{0,\Omega} \tag{25}$$

定理 3　设 u 是问题(22)的广义解，u_h 是一次元差分格式(23)的解，$u\in H_0^1(\Omega)\cap W^{3,p}(\Omega)(p>1)$，则有

$$\|u-u_h\|_0\leqslant Ch^2\|u\|_{3,p} \tag{26}$$

证明　对 $g=u-u_h$，由(24)有

$$\|u-u_h\|_0^2=a(u-u_h,w) \tag{27}$$

设 $\Pi_1 w$ 和 $\Pi_2 w$ 分别为 w 在 U_h 和 V_h 中的插值投影. 由两个解的意义知有

$$a(u-u_h,\Pi_2 w)=0 \tag{28}$$

于是有

$$\|u-u_h\|_0^2=a(u-u_h,w-\Pi_1 w)+a(u-u_h,\Pi_1 w)-a(u-u_h,\Pi_2 w) \tag{29}$$

注意上式右端前两项的双线性泛函按通常意义理解，而末项须按广义函数意义理解[2]. 由双线性形式的有界性和 H^1－估计并用(25)得

$$|a(u-u_h,w-\Pi_1 w)|\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0 \tag{30}$$

另方面，利用 Green 公式可得

$$\begin{aligned} a(u-u_h,\Pi_1 w)=&\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^{2}[a_{ij}(x)-a_{ij}(Q)]\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\frac{\partial\Pi_1 w}{\partial x_i}\mathrm{d}x \\ &-\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\Pi_1 w\mathrm{d}x \\ &+\sum_K\int_{\partial K}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\Pi_1 w\mathrm{d}s+\int_\Omega q(u-u_h)\Pi_1 w\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} a(u-u_h,\Pi_2 w)=&-\sum_K\sum_{p\in K}\int_{\partial K_p^*\cap K}\sum_{i,j=1}^{2}[a_{ij}(x)-a_{ij}(Q)]\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\Pi_2 w\mathrm{d}s \\ &-\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\Pi_2 w\mathrm{d}x+\sum_K\int_{\partial K}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\Pi_2 w\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega} q(u-u_h)\Pi_2 w\,\mathrm{d}x \tag{32}$$

这里 Q 为 $K\in T_h$ 的重心. $\dot{K}$ 表示 K 的三个项点组成的集合, n 为沿相关区域的边界的单位外法向. 于是,

$$a(u-u_h,\Pi_1 w)-a(u-u_h,\Pi_2 w)=\sum_{i=1}^{5}E_i(u-u_h,w) \tag{33}$$

其中, $E_1(u-u_h,w)=\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^{2}[a_{ij}(x)-a_{ij}(Q)]\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\frac{\partial\Pi_1 w}{\partial x_i}\mathrm{d}x,$

$$E_2(u-u_h,w)=-\sum_K\sum_{p\in\dot{K}}\int_{\partial K_p^*\cap K}\sum_{i,j=1}^{2}[a_{ij}(x)-a_{ij}(Q)]\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)\Pi_2 w\,\mathrm{d}s,$$

$$E_3(u-u_h,w)=-\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\Pi_1 w-\Pi_2 w)\mathrm{d}x,$$

$$E_4(u-u_h,w)=\sum_K\int_{\partial K}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Q)\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\cos(n,x_i)(\Pi_1 w-\Pi_2 w)\mathrm{d}s,$$

$$E_5(u-u_h,w)=\int_{\Omega}q(u-u_h)(\Pi_1 w-\Pi_2 w)\mathrm{d}x$$

利用 H^1-估计和(25)式有

$$|E_1(u-u_h,w)|\leqslant Ch|u-u_h|_1|w|_1\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0 \tag{34}$$

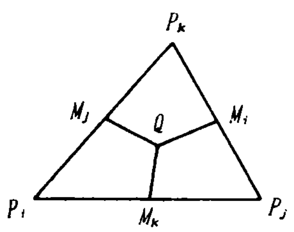

图1 单元 K

Fig. 1 Element K

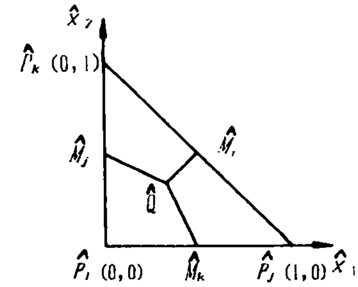

图2 参考元 $\hat{K}$

Fig. 2 Reference element $\hat{K}$

设单元 K 如图1所示, M_i,M_j,M_k 为各边中点, 则有

$$|E_2(u-u_h,w)|\leqslant Ch^{3/2}\sum_K\sum_{l=i,j,k}\Big(\int_{\overline{M_lQ}}\sum_{j=1}^{2}\Big|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}\Big|^2\mathrm{d}s\Big)^{1/2}|w_{l+2}-w_{l+1}|,$$

此处规定 $i+1=j$, $j+1=k$, $k+1=i$, $w_l=w(x_l)$. 由 Taylor 展式并注意 $\Pi_1 w$ 在 K 内为线性函数知

$$|w_{l+2}-w_{l+1}|\leqslant h\Big(\Big|\frac{\partial\Pi_1 w}{\partial x}\Big|+\Big|\frac{\partial\Pi_1 w}{\partial y}\Big|\Big)\leqslant C|\Pi_1 w|_{1,K}\leqslant C|w|_{1,K} \tag{36}$$

设可逆仿射变换 T 将单元 K 映为参考元 $\hat{K}$(图2), K 上函数 $\varphi_j=\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x_j}$ 映为 $\hat{K}$ 上函数 $\hat{\varphi}_j(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\varphi_j(x_1,x_2)\,(j=1,2)$, 点 P_l,M_l,Q 分别映为 $\hat{P}_l,\hat{M}_l,\hat{Q}$. 在此变换下, 显然有

$$\int_{\overline{M_lQ}}|\varphi_j|^2\mathrm{d}s\leqslant h\int_{\overline{\hat{M}_l\hat{Q}}}|\hat{\varphi}_j|^2\mathrm{d}\hat{s},\quad j=1,2.$$

在 $\hat{K}^{*}_{P_{l+1}}\cap\hat{K}$ 上用迹定理知有正常数 C(与 K 无关)使

$$\int_{\overline{\hat{M}_l Q}}|\hat{\varphi}_j|^2\mathrm{d}\hat{s}\leqslant C\|\hat{\varphi}_j\|^2_{1,\hat{K}},\ j=1,2.$$

据 φ_j 与 $\hat{\varphi}_j$ 之间的 Sobolev 半范数的关系

$$|\hat{\varphi}_j|_{0,\hat{K}}\leqslant Ch^{-1}|\varphi_j|_{0,K},\quad |\hat{\varphi}_j|_{1,\hat{K}}\leqslant C|\varphi_j|_{1,K},\quad j=1,2$$

有

$$\int_{\overline{M_l Q}}|\varphi_j|^2\mathrm{d}s\leqslant Ch(h^{-1}|\varphi_j|_{0,K}+|\varphi_j|_{1,K})^2\leqslant Ch|u|^2_{2,K}\tag{37}$$

据(35)～(37)就得到

$$|E_2(u-u_h,w)|\leqslant Ch^2|u|_2|w|_1\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0\tag{38}$$

注意在重心剖分的情形，

$$\int_K(\Pi_1 w-\Pi_2 w)\mathrm{d}x=0,$$

故有

$$\begin{aligned}|E_3(u-u_h,w)|&=\left|\sum_K\int_K\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(Q)\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 u(Q)}{\partial x_i\partial x_j}\right)(\Pi_1 w-\Pi_2 w)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant Ch\|u\|_{3,p}\|\Pi_1 w-\Pi_2 w\|_{0,q}\leqslant Ch^2\|u\|_{3,p}\|u-u_h\|_0\end{aligned}\tag{39}$$

其中 $p,q>1$，$1/p+1/q=1$. 注意边界条件以及函数 $\frac{\partial u}{\partial x_j}(\Pi_1 w-\Pi_2 w)$ 在单元边上的按段连续性不难验证

$$E_4(u-u_h,w)=0\tag{40}$$

最后显然有

$$|E_5(u-u_h,w)|\leqslant Ch^2|u|_2\|u-u_h\|_0\tag{41}$$

联合(33)，(34)，(38)～(41)就得到

$$|a(u-u_h,\Pi_1 w)-a(u-u_h,\Pi_2 w)|\leqslant Ch^2\|u\|_{3,p}\|u-u_h\|_0\tag{42}$$

由(29)，(30)和(42)就得到(26)式．证毕．

类似定理 2 可以证明下面的

定理 4　在定理 3 的条件下有如下最大模估计：

$$\|u-u_h\|_{0,\infty}\leqslant Ch\|u\|_{3,p}\quad(p>1).$$

上述结论也适用于在矩形网上所作的正则直角三角剖分与相应的中心对偶剖分的情形．这时只须将论证稍加修改，取 Π_1 为矩形网格上的双线性插值算子．

参 考 文 献

1　李荣华．两点边值问题的广义差分法．吉林大学自然科学学报，1982(1)：26～40

2　李荣华，祝丕琦．二阶椭圆偏微分方程的广义差分法(1)——三角网情形．高等学校计算数学学报，1982(2)：140～152

3　Liang Dong. $W^{1,p}$－and L^2－Error Estimates for Generalized Difference Methods for Second Order Elliptic Equations. Northeastern Math J. 1990，6(2)：235～242

L^2-Error Estimates for Generalized Difference Method

Chen Zhongying ×

Abstract The generalized difference methods for second order elliptic differential equations in one-dimensional and two-dimensional domain are discussed, and optimal order L^2-and L -error estimates are proved for piecewise linear trial space and piecewise constant test space relative to barycenter dual partition. The results still hold for some cases of circumcenter dual partition.

Keywords elliptic differential equation, generalized difference method, L^2-error estimate

× Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275