中山大学学报（自然科学版）
第32卷 第3期 1993年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.32 №.3 1993

·研究简报·

关于引力场方程的一个谐和解及有关问题

余招贤 崔世治
（中山大学物理学系）

摘 要 本文讨论了爱因斯坦场方程在谐和条件下的真空球对称解，对近年提出的关于谐和坐标的物理意义的新观点，提出有待斟酌的问题。

关键词 引力论，爱因斯坦场方程，谐和条件

周培源教授在一系列报告及文章中，提出了许多关于广义相对论的新观点[1,2]，主要内容包括：①存在一个闵氏平直时空，在其中定义笛卡儿空间坐标和时间，该时空中的引力场通过度规$g_{\mu\nu}$描述，$g_{\mu\nu}$满足场方程及谐和条件。②如同平直时空一样，直接用笛卡儿坐标差来量度空间距离。可以认为，这种观点实质上是一种平直时空框架内的引力论，其中弯曲时空只是描述引力现象的数学工具，而空间测度则是欧几里得的[1]。对谐和条件和谐和坐标的这种理解可能会带来一些新的问题，值得进一步加以分析。本文主要讨论满足谐和条件的真空球对称度规。采用几何单位制，即$c=G=1$。

1 谐和解中积分常数的选择问题

谐和条件是为求解场方程而引入的[3]，但关于谐和条件下定解、解的唯一性问题并未得到普遍的证明。满足谐和条件的坐标系肯定存在[4]，但这种谐和坐标系具有多大优越性，在什么范围内是唯一的，也是有争议的[5]。

下面求解满足谐和条件的真空静态球对称度规（我们略去了其中细节．类似的推导不难从文献〔4〕中找到）。利用球对称性，仅由场方程可得一般解（不一定满足谐和条件）

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{\rho}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{\rho}\right)^{-1}d\rho^2+\rho^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2) \tag{1}$$

其中ρ是径向坐标r的一个任意函数，而M是一个常数。若把M认作中心体质量的值，则牛顿极限要求$\lim\limits_{r\to\infty}\frac{d\rho}{dr}=1$。把$\rho$直接当成径向坐标当然也是可以的，这导致熟知的史瓦西解，但它不是谐和的。

若进一步要求r，ϑ，φ是谐和的，则$\rho(r)$的函数形式由谐和条件定出

本文1992年4月16日收到

$$r=C_1(\rho-M)+C_2\left[\frac{1}{2M}(\rho-M)\ln\left(1-\frac{2M}{\rho}\right)+1\right] \tag{2}$$

C_1和C_2为积分常数。当$\rho\to\infty$时，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\rho\to C_1$，故若令$M$代表中心体质量，应取$C_1=1$。又，通常取$C_2=0$以避免$\rho=2M$时的发散，这其实并非必要。因为$\rho$只不过是$r$的一个待定函数，我们不妨假定当$r$取值$[0,+\infty)$时，$\rho$取值为$[\rho_0,+\infty)$，且$\rho_0>2M$。这反过来构成对$C_2$值的限制。事实上，若取$C_1=1$而$C_2>0$，有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho}=1+C_2\frac{F(\rho)}{2M},\qquad F(\rho)=\ln\left(1-\frac{2M}{\rho}\right)+\frac{M}{\rho}+\frac{M}{\rho-2M} \tag{3}$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\rho}=-\frac{4M^3}{\rho^2(\rho-2M)^2}\leqslant 0 \tag{4}$$

可见$F(\rho)$在$\rho_0\leqslant\rho<+\infty$的区间内递减。注意到$\lim\limits_{\rho\to\infty}F(\rho)=0$，故$F(\rho)\geqslant 0$，从而$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\rho>0$。由(2)易知，$\rho\to 2M$时$r\to-\infty$而$\rho\to+\infty$时$r\to+\infty$。故存在$r(\rho_0)=0$，此处$\rho_0>2M$。可以认为，在(2)式中取$C_1=1$，$C_2>0$便构成普遍的谐和解，可用于描述任意小质球的外场。

2 讨 论

(1)按照传统的观点，坐标的测量意义必须与相应的度规相联系而确定，径向坐标的选择可以有相当大的任意性而不影响理论计算的结果。因而，C_2具体数值的选择实际上是无关重要的。试考虑在式(2)中取$C_1=1$而$C_2=B_1$或B_2，由

$$\begin{cases} r=(\rho_j-M)+B_j\left[\frac{1}{2M}(\rho_j-M)\ln\left(1-\frac{2M}{\rho_j}\right)+1\right] \\ j=1,2 \end{cases} \tag{5}$$

解出
$$\rho_j=\rho_j(r)=f_j(r)+M \tag{6}$$

则可得两套形式上不同的度规

$$\begin{cases} \mathrm{d}s^2=-\frac{1-M/f_j}{1+M/f_j}\mathrm{d}t^2+\frac{1+M/f_j}{1-M/f_j}\,f_j'^2\mathrm{d}r^2 \\ \quad+\tilde{f}_j^2(1+M/f_j)^2r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \\ \text{其中}\qquad f_j'=\mathrm{d}f_j/\mathrm{d}r,\qquad \tilde{f}_j=f_j/r \end{cases} \tag{7}$$

不过，若选一新的径向坐标$r^*=f_j(r)$，则线元变为

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{1-M/r^*}{1+M/r^*}\mathrm{d}t^2+\frac{1+M/r^*}{1-M/r^*}\mathrm{d}r^{*2}+(r^*+M)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) \tag{8}$$

这其实就与通常取$C_2=0$时的谐和度规相同。按传统观点计算任何局部引力实验的结果，与C_2的选择是无关的(甚至与采用谐和度规或其他非谐和的真空球对称度规也是无关的[6])。

(2)然而，若按文献[1]的观点赋予r以直接的"欧几里得测度"意义，则C_2的数值必须进一步选定，否则可以导致对同一个引力效应的不同的理论预言值(一个实例参见本文附录)。

文献〔1〕中选定$C_2=0$，但当$r<M$时，$g_{tt}>0$而$g_{rr}<0$，即t变为类空坐标而r变为类时坐标，这与它的基本观点是不一致的，C_2的数值如何或能否借某些附加条件进一步合理地选定，似是一个尚待斟酌的问题。

参考文献

1 周培源．中国科学，1982，A 4:334
2 秦荣先，阎永廉．广义相对论与引力理论的实验检验．上海：上海科技文献出版社，1987．1
3 Lanczos C. Z Physik，1923，10:7
4 Fock V. The Theory of Space Time and Gravitation. Pergamon Press. London，1959. 346
5 段一士．物理学报，1962，18:4
6 崔世治，余招贤．中山大学学报（自然科学版），1993，32(1):121

〔附　录〕

考察在地球引力场中竖直放置的迈克尔逊干涉仪[6]，不失普遍性，设两臂均在"赤道面"（$\theta=\pi/2$）内．由$ds^2=0$解出坐标光速dr/dt及$rd\varphi/dt$，则不难算出光线分别在相互正交的、等长L的两臂中往返一次的固有时之差$\Delta\tau$．若注意到谐和坐标在新观点中被赋于的测量意义，对竖直与水平两臂现在应分别有$\Delta r=L$及$r\Delta\varphi=L$，当L不太大时，可得$\Delta\tau$的绝对值在式(7)中的两套度规下分别为

$$\begin{cases} |\Delta\tau_j|=4L\sqrt{\dfrac{1+M/f_{j_0}}{1-M/f_{j_0}}}\left[f'_j+f_{j_0}\sqrt{1-M^2/f^2_{j_0}}\right] \\ j=1,\ 2. \end{cases}$$

附标"0"表示在实验点$r=r_0$处取值．当干涉仪在竖直面中转过90°时，条纹移动为$2\Delta\tau/\lambda$，故$\Delta\tau$为一直接可观测量，一个理论对它的预言值应是唯一的。

在地球表面上M/r是一个小量，M/ρ亦为同级小量，故可考虑如下近似：展开(5)式，计算至二阶项，有

$$r=\rho_j-M-(B_jM^2/3\rho_j^2)+O[(M/\rho_j)^3]$$

故　$$f_j(r)=\rho_j-M\approx r+B\,M^2/3r^2+O[(M/r)^3]$$

于是，$$\sqrt{\frac{1+M/f_{j_0}}{1-M/f_{j_0}}}\approx 1+\frac{M}{r_0}+\frac{M^2}{2r_0^2}$$

$$f'_{j_0}-f_{j_0}\sqrt{1-M^2/f^2_{j_0}}\approx M^2/2r_0^2-Bj\ (M^2/r_0^3)$$

最后得　$$|\Delta\tau_j|\approx(M^2/r_0^2)L-B_j(2LM^2/r_0^3)$$

由于式中M、r_0、L各量是确定的，其数值在两套解中应是相同的，故B_j不同将导致对于条纹移动的不同预言值。

A Harmonic Solution to Gravitational Field Equations and its Implication

Yu Zhaoxian Cui Shizhi*

Abstract The spherically symmetric solution to Einstein Field equations in vacuum under harmonic condition is discussed and a questionable subject is suggested based on Zhou's proposal on the physical meaning of the harmonic coordinates.

Keywords gravitational theory, Einstein field equations, harmonic coordinate condition

* Department of Physics, Zhongshan University