第 34 卷　第 1 期
1995 年 1 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS　SUNYATSENI

Vol. 34　No. 1
Jan. 1995

含磁荷磁流麦氏方程组解的特性*

宫　蒂

(中山大学无线电电子学系，广州 510275)

摘　要　本文研究了含磁荷磁流麦氏方程组的解的一般性质．并具体研究随时间指数衰减的平面电磁场解和受矩形脉冲电激励的暂态平面电磁场解，说明磁流的贡献是重要的．

关键词　电磁场理论，Maxwell 方程组，磁单极

分类号　O441.4

在经典的、宏观的范围内，麦氏方程组是精确描述电磁场运动规律的基本理论．在麦氏方程组中，磁感应强度 $\vec{B}$ 是无源场，它的散度等于零．而电场强度 $\vec{E}$ 是有源场，它的散度正比于电荷密度．自然界中是否存在与电荷相应的单独的磁荷作为磁场的源，这是至今尚未解决的重要问题．Dirac 很早就从理论上推测可能存在单磁荷[1]（也叫磁单极）．虽然单磁荷迄今未被实验发现，但这个问题具有根本的重要性，一直引起相当的理论和实验的探讨[2~5]．近来，Harmuth 指出我们无法在文献中找到在有损耗的介质中有始有终信号传播的麦氏方程组的解[6]，但是如果引入磁流密度就有可能获得这样的解．这就从宏观物理方面提出检测单磁荷存在的方法．因此，更深入地研究含磁荷磁流的麦氏方程组的解的性质具有重要的意义，不仅可以揭示单磁荷的贡献而且有助于解决单磁荷的存在性问题．本文研究了含磁荷磁流麦氏方程组的解的一般性质，并具体研究随时间指数衰减的平面电磁场解和受矩形脉冲电激励的暂态平面电磁场解，说明它们是含磁荷磁流麦氏方程组的解而不是通常的不含磁荷磁流麦氏方程组的解．

1　含磁荷磁流的麦氏方程组及其解的一般性质

含磁荷磁流的麦氏方程组可表示为以下形式

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t-\vec{J}_m \\ \nabla\times\vec{H}=\partial\vec{D}/\partial t+\vec{J}_e \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_e \\ \nabla\cdot\vec{B}=\rho_m \end{cases} \tag{1}$$

式中，$\vec{E}$，$\vec{H}$，$\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 分别是电场强度，磁场强度，电位移矢量和磁感应强度。ρ_e，ρ_m，$\vec{J}_e$

收稿日期：1993-09-20

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心资助项目

和 $\vec{J}_m$ 分别是电荷密度，磁荷密度，电流密度和磁流密度.

对于一般各向同性线性介质有以下简单的线性关系式

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\ \vec{B}=\mu\vec{H},\ \vec{J}_e=\sigma\vec{E},\ \vec{J}m=s\vec{H} \tag{2}$$

式中，ϵ，μ，σ 和 s 分别为介质的介电常数，介磁常数，导电率和导磁率.（在此将通常书中称 μ 为磁导率改叫介磁常数，以使电与磁的量更加对称化）

由于（1）中最后一行式，$\nabla\cdot\vec{B}\neq0$，所以不能定义矢量势 $\vec{A}$，且 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. 但如果把 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 分成电型场和磁型场之和，则可以分别定义电型矢量势 $\vec{A}_e$，电型标量势 φ_e 和磁型矢量势 $\vec{A}_m$. 磁型标量势 φ_m，只要分别求解电型势和磁型势就可分别求出电型场和磁型场，将二者相加便可求得电场强度和磁场强度. 当然，我们也可以从电场强度和磁场强度所满足的偏微分方程直接求解. 例如，对于线性介质，应用关系式（2），设在电荷和磁荷为零的空间，可得

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\gamma^2\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\alpha^2\vec{E}=0\\[2ex]\nabla^2\vec{H}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\gamma^2\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\alpha^2\vec{H}=0\end{cases} \tag{3}$$

式中　$\alpha^2=s\sigma$，$\gamma^2=\mu\sigma+\varepsilon s$，$c^2=1/\mu\varepsilon$　(4)

值得指出，与通常的麦氏方程组不同就在于（3）式中 $\alpha\neq0$，当 $\alpha=0$ 且 $\gamma=\mu\sigma$ 时，就回到通常的麦氏方程组. 由于方程（3）多了 $\alpha\neq0$ 的项，无限延伸的平面正弦波就不是方程（3）的解. 我们可以通过以下的例子证明方程（3）有随时间指数衰减的解，从而表示出这是与通常麦氏方程组的解有重大差别的解.

2　两个暂态解的例子

研究电磁波的性质时，通常采用无限延伸的周期性平面正弦波及其迭加来分析. 这个方法解决了大量的实际问题，并已经取得巨大成功. 然而许多实际的信号并不是无限延伸的周期性正弦波，例如雷达信号就是一种有始有终的暂态电磁场. 通过以下的两个例子，将深入研究有始有终的平面场解的问题.

例 1　考虑在电荷密度和磁荷密度都为零，但可以形成电流和磁流的线性介质中沿 z 轴传播的平面 TEM 波

$$\vec{E}=E(z,t)\vec{e}_x,\vec{H}=H(z,t)\vec{e}_y \tag{5}$$

代入(3)式，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2E(z,t)}{\partial t^2}+\gamma^2\dfrac{\partial E(z,t)}{\partial t}+\alpha^2E(z,t)-\dfrac{\partial^2E(z,t)}{\partial z^2}=0\\[2ex]\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2H(z,t)}{\partial t^2}+\gamma^2\dfrac{\partial H(z,t)}{\partial t}+\alpha^2H(z,t)-\dfrac{\partial^2H(z,t)}{\partial z^2}=0\end{cases} \tag{6}$$

由于介质是有损耗的，所以不衰减的无限延伸的周期性平面正弦波不是方程（6）的解. 设 $t>0$，$z>0$ 情况下，电磁波随时间和距离指数下降，即

$$E(z,t)=E_o\mathrm{e}^{i(\omega t-kz)}\mathrm{e}^{-a_1t}\mathrm{e}^{-b_1z} \tag{7}$$

式中　$kc=\omega$，　a_1，$b_1>0$

代进（6）式得

$$
\begin{cases}
b_1 = (k/2c)\sqrt{(\gamma^4c^4+4\alpha^2c^2/(1+k^2)} \\
a_1 = \dfrac{1}{2}r^2c^2\left[\sqrt{(\gamma^4c^4+4\alpha^2c^2)/(\gamma^4c^4(1+k^2))}-1\right]
\end{cases}
\tag{8}
$$

可见仅当

$$
\alpha^2 > \omega^2\gamma^4/2 \tag{9}
$$

时，才有 $a_1>0$ 的解．若 $\alpha=0$，则随时间和距离都指数下降的平面正弦波（7）式不满足方程．即通常的麦氏方程组不存在随时间和距离都指数衰减的暂态解．如果能从实验上观测到随时间和距离都指数衰减的暂态电磁场，就可以有力地证明磁流的存在性．

例 2　考虑在 $z=0$ 平面上有始有终的电场激励产生的电磁场，边条件和初条件为

$$
\begin{cases}
E(0,t) = E_o\theta(t)\theta(T-t),\ H(o,t)=0,\ T=\text{常数} \\
E(\infty,t),\ H(\infty,t)\ \text{皆有界},\ t=0\ \text{时，电场，磁场皆为零}
\end{cases}
\tag{10}
$$

式中 $\theta(t)$ 是单位阶跃函数，$t>0$ 时 $\theta(t)=1$，$t<0$ 时，$\theta(t)=0$，$\theta(t)\theta(T-t)$ 为 $[0,T]$ 时间内的矩形脉冲．当 $t<0$ 及 $t>T$ 时，$E(o,t)=0$，表明电磁激励是有始有终的矩形电脉冲．在此条件下产生的电磁场是暂态电磁波，可写为

$$
\begin{cases}
E(z,t) = E_o\left[W_1(z,t)+e^{-\alpha z}\right] - E_o\left[W_2(z,t)+e^{-\alpha z}\right]\theta(T-t) \\
H(z,t) = -\displaystyle\int_0^z[\varepsilon\partial E(z,t)/\partial t + \sigma E(z,t)]\mathrm{d}z
\end{cases}
\tag{11}
$$

式中

$$
\begin{cases}
W_1(z,t) = \displaystyle\int_o^\infty[A_1(k)\mathrm{e}^{\Gamma_1(k)t} + A_2(k)e^{\Gamma_2(k)t}]\sin kz\mathrm{d}k \\
W_2(z,t) = \displaystyle\int_0^\infty[A_1(k)\mathrm{e}^{\Gamma_1(k)(t-T)} + A_2(k)\mathrm{e}^{\Gamma_2(k)(t-T)}]\sin kz\ \mathrm{d}k \\
\Gamma_1(k) = -\dfrac{1}{2}c^2\gamma^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{c^4\gamma^4 - 4c^2(\alpha^2+k^2)} \\
\Gamma_2(k) = -\dfrac{1}{2}c^2\gamma^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{c^4\gamma^4 - 4c^2(\alpha^2+k^2)}
\end{cases}
\tag{12}
$$

$A_1(k)$ 和 $A_2(k)$ 由以下公式确定

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^\infty[A_1(k)+A_2(k)]\sin kz\mathrm{d}k = e^{-\alpha z} \\
\displaystyle\int_0^\infty[A_1(k)\Gamma_1(k)+A_2(k)\Gamma_2(k)]\sin kz\mathrm{d}k = 0
\end{cases}
\tag{13}
$$

由傅立叶正弦变换公式，（13）式的逆变换为

$$
A_1(k)+A_2(k) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin kz\mathrm{d}z \tag{14}
$$

可见没有磁流时，$\alpha=0$，上式右边发散．表明磁流项存在的重要性．值得指出，对发散积分作如下规则化处理：

$$
\int_0^\infty\sin kz\mathrm{d}z = \lim_{\alpha\to0}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin kz\mathrm{d}z
$$

是常用的数学技巧．在本例，α 正好代表磁流的贡献．上述技巧的物理意义在于先引进磁流最后才令磁流→0，在本例，这个极限存在．

3　讨　论

以上我们具体讨论了含磁流的麦氏方程组的两种暂态电磁场解．在第一个例子中，要

求 $\alpha^2>\omega^2\gamma^4/2$ 才能有随时间指数衰减的暂态解．因而只要观测到这种暂态电磁场就可以判定有磁流存在．在第二个例子中，由于 $\alpha\to 0$ 时，暂态解仍然存在，所以不能由此得出更多的关于磁流存在性的结论，但不排除在其它的暂态电磁场中都能允许 $\alpha\to 0$ 而保持解的存在．所以进一步研究磁荷磁流的贡献具有重要的意义．

参 考 文 献

1 Dirac P A M. The theory of magnetic poles. Phys Rev, 1948, 74: 817

2 Schwinger J. Magnetic charge and quantum field theory. Phys Rev, 1966, 144: 1087

3 ' tHooft G. Magnetic monopoles in unified gauge theories. Nucl Phys B, 1974, 79: 276

4 李华钟，冼鼎昌，郭硕鸿．非阿贝尔规范群中的磁单极．高能物理与核物理，1978，2：23

5 Eberhard P H, Ross R R, Taylor J D, et al. Evidence at the 10e－18 probability level against the production of magnetic monopoles in proton interactions at 300GeV/c. Phys Rev D, 1975, 11: 3099

6 Harmuth H F. Propagation of Nonsinusoidal Electromagnetic Waves. Academic, 1986

Features of the Solution of Maxwell' s Equations with Magnetic Charge and Magnetic Current

Gong Di *

Abstract The features of the solution of Maxwell' s equations with magnetic charge and magnetic current are investigated. It is shown that transient transverse plane electromagnetic waves are solutions of Maxwell' s equations provided the magnectic current exists.

Keywords electromagnetic theory, Maxwell' s equations, magnetic monopoles

* Department of Radio and Electronics, Zhongshan University, Guangzhou 510275