

散乱点二元多项式自然样条的 极小性质与定义区域*

关履泰

(中山大学计算机科学系, 广州 510275)

摘 要 本文导出散乱点二元多项式自然样条的极小性质, 并把该样条定义区域拓展到包含散乱点矩形的半任意区域或无限区域.

关键词 散乱点, 自然样条, 极小性质, 半任意区域, 无限区域

分类号 O241.5

1 引 言

多元散乱数据拟合是十分重要而又相当困难的问题, 一直来是一个十分活跃的研究方向. 1990 年李岳生、关履泰^[1]用希氏空间样条理论首次提出了矩形域上散乱点二元多项式自然样条, 其方法简洁, 有较好的变分性质, 且可保证适当的光滑性. C. K. Chui 与关履泰把结果推广到多元凸锥域并用于最佳求积公式上^[2], 与该问题有关的还有 [3]~[5]等工作. 近年来对箱样条、重分算法与正交小波^[6]等的研究, 十分重视无限区间的性质. 本文拟导出在含散乱点矩形的半任意区域该样条的极小性质, 进而把定义域拓展, 这一结果对进一步研究该样条特征、结构, 提供更简单的算法, 及讨论光顺问题与广义插值问题均有显著作用.

定义 1 任意给定 N 个散乱点 $(x_i, y_i), i = \overline{1, N}$, 记 $a' = \min \{x_i\}, b' = \max \{x_i\}, c' = \min \{y_i\}, d' = \max \{y_i\}$, 称 $R' = [a', b'] \times [c', d']$ 为散乱点矩形. 若任一区域 Ω_0 与 $R = [a, b] \times [c, d]$ 满足 $R' \subset R \subset \Omega_0$. 记 $\Omega_1 = (-\infty, a) \times (c', d') \cup (a', b') \times (-\infty, c), \Omega_2 = \Omega_1 \cup (b, +\infty) \times (c', d') \cup (a', b') \times (d, +\infty)$, 称 $\Omega = \Omega_0 \setminus \Omega_1$ 为包含散乱点矩形的大半任意区域, $\Omega' = \Omega_0 \setminus \Omega_2$ 为小半任意区域, 统称半任意区域. 当 Ω_0 为全平面 R^2 时, 它们分别记 Ω_∞ 与 Ω'_∞ .

收稿日期: 1992-10-15, 修改完成日期: 1993-11-3

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

2 极小性质

下面用 $\sum_{i\alpha\beta}$ 表示 $\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha \in I} \sum_{\beta \in J_j}$, \sum_{jk} 表示 $\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1}$, 记 $g_i^{\alpha\beta} = \frac{(x-x_i)^{m-\alpha-1} (y-y_i)^{n-\beta-1}}{(m-\alpha-1)! (n-\beta-1)!}$,

$$g_{i+}^{\alpha\beta} = \frac{(x-x_i)_+^{m-\alpha-1} (y-y_i)_+^{n-\beta-1}}{(m-\alpha-1)! (n-\beta-1)!}, \quad P_{jk}(t, \tau) = t^j \tau^k$$

引理 1 散乱点二元多项式自然样条 $\sigma(x, y)$ 的系数 $\lambda_i^{\alpha\beta}$ 满足 $\sum_{i\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} P_{jk}^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = 0$, $j=0, \dots, m-1; k=0, \dots, n-1$.

证明 用共轭运算, [1]中已有 $T^*T\sigma = \sum_{i\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} k_i^{\alpha\beta}$, 这里 $(k_i^{\alpha\beta}, u) = u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i)$.

再从 $(T^*T\sigma, u) = (T\sigma, Tu) = 0, \forall u \in N(T)$, 注意 $N(T)$ 一般式为 $P_{jk}(t, \tau)$ 而得证.

引理 2 在引理 1 的假设下, 对任意 x 与 y 有恒等式 $\sum_{i\alpha\beta} (-1)^{m+\alpha-\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} g_i^{\alpha\beta} \equiv 0$.

证明 左式 = $\frac{(-1)^{m+n}}{(m-1)!(n-1)!} \sum_{jk} (-1)^{k+j} c_{m-1}^j c_{n-1}^k x^{m-j-1} y^{n-k-1} [\sum_{i\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} P_{jk}^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i)]$ 根据引理 1 得证.

定理 1 对 $x \leq a'$ 或者 $y \leq c'$ 或者 $x \geq b'$ 并且 $y \geq d'$ 的点, 散乱点二元多项式自然样条 $\sigma(x, y)$ 必定满足 $\sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv 0$.

证明 因为 $\sigma^{(m, n)}(x, y) = \sum_{i\alpha\beta} (-1)^{m+n-\alpha-\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} g_{i+}^{\alpha\beta}$, 如果 $x \leq a'$ 或者 $y \leq c'$, 那么 $(x-x_i)_+^{m-\alpha-1} = 0$ 或者 $(y-y_i)_+^{n-\beta-1} = 0$, 从而 $\sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv 0$

如果 $x \geq b'$ 并且 $y \geq d'$, 那么 $\sigma^{(m, n)}(x, y) = \sum_{i\alpha\beta} (-1)^{m+n-\alpha-\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} g_i^{\alpha\beta}$

根据引理 2 获证.

推论 1 $\sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv 0$ 对一切 $(x, y) \in \Omega \setminus R$ 成立.

定理 2 当 $x \leq a'$ 或者 $x \geq b'$ 时 $\sigma^{(m, \nu)}(x, d) = 0$, 当 $y \leq c'$ 或者 $y \geq d'$ 时 $\sigma^{(\mu, n)}(b, y) = 0$, ($\mu=0, \dots, m-1; \nu=0, \dots, n-1$).

证明 由 $\sigma(x, y)$ 的表达式得

$$\sigma^{(m, \nu)}(x, d) = \sum_{i\alpha\beta} (-1)^{m-\alpha} \lambda_i^{\alpha\beta} \frac{(x-x_i)_+^{m-\alpha-1}}{(m-\alpha-1)!} \cdot \frac{(y_i-d)^{\nu-\beta}}{(\nu-\beta)!} \cdot h(\nu-\beta)$$

这里 $h(\nu-\beta) = \begin{cases} 0 & \nu < \beta \\ 1 & \nu \geq \beta \end{cases}, \nu=0, \dots, m-1$

如果 $x \leq a'$, 那么 $(x-x_i)_+^{m-\alpha-1} = 0$ 从而 $\sigma^{(m, \nu)}(x, d) = 0$

如果 $x \geq b'$, 那么

$$\sigma^{(m, \nu)}(x, d) = \frac{(-1)^{m+\nu}}{(m-1)!\nu!} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{k+j} c_{m-1}^j c_{\nu}^k x^{m-j-1} d^{\nu-k} [\sum_{i\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha\beta} P_{jk}^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i)]$$

根据引理 1 可知上式为零, 同理可证后半结论.

推论 2 $\sigma^{(m, \nu)}(x, d) \equiv \sigma^{(\mu, n)}(b, y) \equiv 0, \mu=0, \dots, m-1, \nu=0, \dots, n-1$ 对一切 $(x, y) \in \Omega \setminus R$ 成立. 且此时 $\sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv 0$.

推论 3 $\sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in \Omega_{\infty} \setminus R; \sigma^{(m, n)}(x, y) \equiv \sigma^{(m, \nu)}(x, d) \equiv \sigma^{(\mu, n)}(b, y) \equiv$

$0, \mu=0, \dots, m-1; \nu=0, \dots, n-1, \forall (x, y) \in \Omega_\infty \setminus R.$

定理 3 当 $x \leq a'$ 时 $\sigma^{(m, \nu)}(x, c) \equiv 0, y \leq c'$ 时 $\sigma^{(\mu, n)}(a, y) \equiv 0.$

定理 4 (半任意区域极小性质) 设 $\sigma(x, y)$ 为散乱点二元多项式自然样条, Ω 与 Ω' 分别为对应包含散乱点矩形的大、小半任意区域, $\Omega_a = \inf_{(x, d) \in \Omega'} \{x\}, \Omega_b = \sup_{(x, d) \in \Omega'} \{x\},$

$\Omega_c = \inf_{(b, y) \in \Omega} \{y\}, \Omega_d = \sup_{(b, y) \in \Omega} \{y\}$ 则

$$J_\Omega(\sigma) \leq J_\Omega(u) \quad \forall u \in H^{mn}(\Omega) \cap I_x,$$

$$J_{\Omega'}(\sigma) \leq J_{\Omega'}(u) \quad \forall u \in H^{mn}(\Omega') \cap I_x,$$

这里

$$J_\Omega(u) = \iint_\Omega (u^{(m, n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b (u^{(m, \nu)}(x, d))^2 dx$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_c^d (u^{(\mu, n)}(b, y))^2 dy$$

$$J_{\Omega'}(u) = \iint_{\Omega'} (u^{(m, n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\Omega'_a}^{\Omega'_b} (u^{(m, \nu)}(x, d))^2 dx$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_{\Omega'_c}^{\Omega'_d} (u^{(\mu, n)}(b, y))^2 dy$$

$$I_x = \{u | u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}, \quad i = \overline{1, N}, \alpha \in I_x, \beta \in J_x\}.$$

证明 仅证定理后半部, 同理可得前半部.

因为 $R \subset \Omega'$, 所以 $a \geq \Omega_a, b \leq \Omega_b, c \geq \Omega_c, d \leq \Omega_d$ 注意 $(u^{(m, n)}(x, y))^2, (u^{(m, \nu)}(x, d))^2$ 与 $(u^{(\mu, n)}(b, y))^2$ 均非负, 我们有

$$J_R(u) = \iint_R (u^{(m, n)}(x, y))^2 dx dy$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b (u^{(m, \nu)}(x, d))^2 dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_c^d (u^{(\mu, n)}(b, y))^2 dy \leq J_{\Omega'}(u)$$

根据推论 2, $J_{\Omega'}(\sigma) = J(\sigma)$. 由定义 $J(\sigma) \leq J(u)$. 综合这些结果即得结论.

定理 5 (无限域极小性质) 在定理 4 条件下, 其结论中 Ω 与 Ω' 分别改为 Ω_∞ 与 Ω_∞' ; Ω_a 和 Ω_c 改为 $-\infty, \Omega_b$ 和 Ω_d 改为 $+\infty$. 即得出无限域极小性质.

3 定义区域与自然样条的构造

散乱点二元多项式自然样条最初定义在矩形域^[1], [2]把它推广到多元情形并把定义域扩张到略加限制的锥域上. 本文借助极小性质, 把定义域扩张到含散乱点矩形的半任意区域与无限区域上.

定理 6 (延拓定理) 在含散乱点矩形的任意区域 Ω . 内扩张散乱点二元多项式自然样条的定义区域 R , 要求在新区域中保持其分片表达式并有定理 4 那种极小性质, 那么这个新区域可以是定理 4 的含散乱点矩形的半任意区域.

类似地, 从定理 5 出发可以得出

定理 7(延拓定理) 在全平面 R^2 内扩张散乱点二元多项式自然样条的定义域 R , 要求在新域中保持其表达式, 且有定理 5 的极小性质, 那么这个新域就是定理 5 中的无限域.

问题 1 对散乱点 (x_i, y_i) 与实值 $z_i^{\alpha\beta} (\alpha \in I_i, \beta \in J_i, i = \overline{1, N})$ 在含散乱点矩形半任意域 Ω (或 Ω') 中寻找 $\sigma_1(x, y) \in H^{m,n}(\Omega)$ (或 $H^{m,n}(\Omega')$) 使 $\sigma_1^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}$, 且 $J_1(\sigma_1) = \min J_1(u)$ 对 $u \in H^{m,n}(\Omega)$ (或 $H^{m,n}(\Omega')$), $u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}$ 成立. 其中 $J_1(u)$ 为定理 4 中相应不等式的右端.

问题 2 对散乱点 (x_i, y_i) 与实值 $z_i^{\alpha\beta}$ 在含散乱点矩形无限域 Ω_∞ (或 Ω'_∞) 中寻找 $\sigma_2(x, y) \in H^{m,n}(\Omega_\infty)$ (或 $H^{m,n}(\Omega'_\infty)$), 使 $\sigma_2^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}$, 且 $J_2(\sigma_2) = \min J_2(u)$ 对 $u \in H^{m,n}(\Omega_\infty)$ (或 $H^{m,n}(\Omega'_\infty)$), $u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}$ 成立. 其中 $J_2(u)$ 为定理 5 中相应不等式的右端, $\alpha \in I_i, \beta \in J_i, i = \overline{1, N}$.

定理 8 问题 1 与问题 2 的解都是对应矩形域 R 中的散乱点二元多项式自然样条.

类似^{[1][2]}, 可以化为 Hilbert 空间的插值样条问题, 得出存在唯一性, 特征性质等. 注意定义域不同, 范数略有差异.

特征性质可刻划为

定理 9 满足插值条件的 $H^{m,n}(\Lambda)$ 的函数 $\sigma(x, y)$ 是上问题的解当且仅当

$$\iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) u^{(m,n)}(x, y) dx dy + \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b \sigma^{(m,\nu)}(x, d) u^{(m,\nu)}(x, d) dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_c^d \sigma^{(\mu,n)}(b, y) u^{(\mu,n)}(b, y) dy = 0$$

且 $\sigma^{(m,n)}(x, y) \equiv \sigma^{(m,n)}(x, d) \equiv \sigma^{(\mu,n)}(b, y) \equiv 0$ 对 $\forall (x, y) \in \Lambda \setminus R, \forall u \in H^{m,n}(\Lambda), u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = 0$ 成立 (视不同问题, Λ 取 Ω, Ω' 或 $\Omega_\infty, \Omega'_\infty$).

证明 建立相应希氏空间, 定义算子 T, A , 化为希氏空间插值样条问题, 据有关特征定理^[1,2], $\sigma(x, y)$ 是问题的解当且仅当要证的式子积分区域分别改为 $\Lambda, \Lambda_a, \Lambda_b, \Lambda_c$ 与 Λ_d 时成立, (视不同问题 Λ_a 取 a, Ω_a 或 $a, -\infty$, 类似处理 $\Lambda_b, \Lambda_c, \Lambda_d$) 再用推论 1, 2, 3 得证.

证明时用定理 2, 还可得

推论 4 在定理 9 条件下, 把结论的积分限 a, b, c, d 改为 a', b', c', d' , 而 $\sigma^{(m,\nu)}(x, d) \equiv \sigma^{(\mu,n)}(b, y) \equiv 0$ 对 $x \leq a'$ 或 $x \geq b', y \leq c'$ 或 $y \geq d'$ 成立.

把满足定理 9 结论式子的全体函数组成的空间称为样条函数空间, 记为 S .

定理 10 设 σ 是问题之解, $s \in S, u \in I_s = \{u \in H^{m,n}(\Lambda) : u^{(\alpha, \beta)}(x_i, y_i) = z_i^{\alpha\beta}, \alpha \in I_i, \beta \in J_i, i = \overline{1, N}\}$, 则 $J_i(u-s) = J_i(u-\sigma) + J_i(\sigma-s)$ (视不同问题, i 取 1 或 2).

定理 10 亦称第一积分关系, 类似[1]可由它得到最佳逼近性质. 因为现在问题之解就是矩形域中的散乱点二元多项式自然样条, 所以解的存在性、唯一性及其构造均与[1]相同. [1]中指出极小化泛函改为

$$\iint_R (u^{(m,n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b (u^{(m,\nu)}(x, c))^2 dx + \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_c^d (u^{(\mu,n)}(a, y))^2 dy$$

也有散乱点二元多项式自然样条, 并给出其表达式. 对这种样条, 只要用 $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ 代替

Ω_1 , 那么上述极小性质与定义区域的结果都成立. 注意这时有

定理 1' 对 $x \geq b'$ 或者 $y \geq d'$ 或者 $x \leq a'$ 并且 $y \leq c'$ 的点, 对应(1)式的样条必满足 $\sigma^{(m,y)}(x,y) \equiv 0$.

定理 2' 当 $x \leq a'$ 或者 $x \geq b'$ 时, 对应(1)的 $\sigma^{(m,c)}(x,c) \equiv 0$, 当 $y \leq c'$ 或者 $y \geq d'$ 时, $\sigma^{(\mu,n)}(a,y) \equiv 0$.

定理 3' $x \geq b'$ 对应(1)的 $\sigma^{(m,d)}(x,d) \equiv 0$, $y \geq d'$ 时 $\sigma^{(\mu,n)}(b,y) \equiv 0$.

文[1]中的算例可以验证本文结论. 不难把本文的所有结果推广到高于二维空间的高维空间.

参 考 文 献

- 1 Li Yuesheng, Guan Lütai. J of comp Math 1990, 8(2):135~146.
- 2 Chui C K, Guan Lütai. Multivariate polynomial natural splines for interpolation of scattered data and other applications. in Workshop on Computational Geometry eds. A Conte etc., World Scientific, London, 1993. 77~95
- 3 Guan Lütai. Chinese J of Numer Math & Appl 1989, 11(2):11~23
- 4 胡日章. 矩形域上散乱数据的离散边界条件光顺逼近. 中山大学学报(自然科学版), 1990, 29(4):17~23
- 5 韩国强. 散乱数据多元最优插值的误差估计及其超收敛性. 计算数学, 1993, 15(1):39~48
- 6 Dahmen W, Micchelli C A. On stationary subdivision and the construction of compactly supported orthonormal wavelets. in Multivariate Approximation and Interpolation. W. Haussman & K. Jetter (eds) Birkhauser Verlag, Basel, 1990. 69~89

Minimum Properties and Defined Domains on Bivariate Polynomial Natural Splines to Scattered Data

Guan Lütai *

Abstract An important problem about minimum properties throughout infinite domains of bivariate polynomial natural splines to scattered data is solved, and some minimum properties in half arbitrary domains also are built. Defined domains of the splines are extended to infinite domains or half arbitrary domains.

Keywords Scattered data, Natural splines, Minimum properties, Half arbitrary domains, Infinite domains

* Department of Computer Science, Zhongshan University