第34卷 第3期
1995年7月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 3
Jul. 1995

自然增长椭圆EULER方程特征值问题*

沈尧天　　　　马汝念

(华南理工大学应用数学系,广州 510650)　(中山大学数学系)

摘　要　本文研究了适当条件之下的自然增长椭圆EULER方程的特征值问题的可解性及正则性.

关键词　自然增长,椭圆型EULER方程,特征值问题,变分方法
分类号　O175.25,O175.9

1　前　言

本文讨论自然增长EULER方程特征值问题.

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}F_i(x,u,Du)+F_u(x,u,Du)=\lambda|u|^{p-2}u \qquad x\in\Omega \tag{1}$$
$$u(x)-w(x)\in W_0^{1,m}(\Omega)$$

式中,$F_i=\dfrac{\partial}{\partial q_i}F(x,u,q)$,　$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$;　$F_u=\dfrac{\partial}{\partial u}F(x,u,Du)$

Ω是R^n中的有界域,$n>m$,$m\leqslant p<\dfrac{nm}{n-m}$,$w(x)\in W^{1,m}(\Omega)\cap L_\infty(\partial\Omega)$. $W_0^{1,m}(\Omega)$及$W^{1,m}(\Omega)$均是Sobolev空间.

考虑形如:$I(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x$的重积分,则易见其变分问题

$$I(u)=\inf_{\nu\in k}I(\nu)$$
$$K=\{u|u\in W^{1,m}(\Omega),\ u-w\in W_0^{1,m}(\Omega)\}$$

若$F(x,u,Du)$满足一定条件下,可证明存在解[1]. 亦可用类似方法证明如下变分问题:

$$I(u)=\inf_{\nu\in E}I(\nu),$$
$$E=\{u|u\in k,\ \|u\|_p=1\} \tag{2}$$

存在解. 此地$\|u\|_p=\|u\|_{L_p}$当$F(x,u,q)$是自然增长时,只要$u\in L_\infty(\Omega)$,$I(u)$是

收稿日期:1994-10-24
*　中国科学院科学基金会和中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

可微的[2]，但十分困难去验证变分问题(2)的解 $u(x)$ 是有界，这因为 $F(x, u, q)$ 是自然增长而且泛函限制在 E 上.

文〔3〕曾证明在某些条件之下，泛函 $I(u)$ 在限制 E 上最小值 u 是有界的，这些条件之一是：

$$-C_4F_i(x, u, q)q_i \leqslant uF_u(x, u, Du) \quad (0 \leqslant C_4 < 1) \tag{3}$$

在文〔3〕中的方法，简单说，若 $u(x)$ 是满足条件(3)的解，则对某些特殊试验函数 φ，当 $t = 0$ 时，$I(u + t\varphi)/(\| u + t\varphi \|)$ 关于 t 是可微的，所以 $< I'(u), \varphi > = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi \mathrm{d}x$. 这一事实证明了 u 是有界的，因而，u 是问题(1)的弱解.

本文将提出一个与〔3〕完全不同的新方法来证明：使 $I(u)$ 在限制 E 上取最小值的 $u(x)$ 是有界的，其优点是，去掉条件(3)，而且比〔3〕更为简便. 该方法是利用 $u(x)$ 使 $I(u)$ 取最小，选适当的比较函数.

$$u^k / \| u^k \|_p,$$

由 $I(u) \leqslant I(u^k / \| u^k \|_p)$ 推出属于某 Giorgi 类函数[1]，由此推出 $u(x)$ 是有界的.

2　关于 $F(x, u, q)$ 的假设

(i) 设 $F(x, u, q)$ 关于 x 是可测的，而关于 u 及 q 是连续可微的，且

$$F(x, u, q) \geqslant 0;$$

(ii) $F(x, u, q) - F(x, u, \bar{q}) - F_i(x, u, \bar{q})(q_i - \bar{q}_i) > 0, \quad \forall\, q \neq \bar{q}$　　(4)

(iii) 存在　$u_0 \in E$ 使　$I(u_0) < +\infty$　　(5)

(iv) 当 $|u| \geqslant \| w \|_{L_\infty(\partial\Omega)}$ 时满足

$$|F_i(x, u, q)q_i| \leqslant C[\sigma(|u|)|q|^m + |q|^{m_1}] \tag{6}$$

$$|F_u(x, u, q)u| \leqslant C[\sigma(|u|)|q|^m + |q|^{m_1} + |u|^s + \varphi(x)|u|^m] \tag{7}$$

式中，$1 \leqslant m_1 \leqslant m$，$m \leqslant s < \dfrac{nm}{n-m}$，$\varphi(x) \in L_r(\Omega)$，$r > \dfrac{n}{m}$，$\sigma(t)$ 是非减连续正函数，$\sigma(t) \geqslant \lambda > 0$

且

$$\sigma(2t) \leqslant c\sigma(t), \quad \forall\, t \geqslant 0 \tag{8}$$

(v) 限制条件：

$$F(x, u, q) \geqslant \sigma(|u|)|q|^m - c|u|^p - \varphi_1(x)|u|^m \tag{9}$$

其中，$\varphi_1(x) \in L_{r_1}$，$r_1 = \dfrac{m}{p-m}$，当 $p > m$ 时.

$\varphi_1(x) \in L_\infty$，　　当 $p = m$ 时.

3　主要结果

定理 1　若 $F(x, u, q)$ 满足条件(i)，(iv)，(v)，则变分问题(2)的解 $u(x)$ 必有界.

证明　设 $A_k = \{x \in \Omega | u(x) > k\}$

$$u^k(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \backslash A_k \\ k & x \in A_k \end{cases}$$

易知　当 $k \geqslant \| \omega \|_{L_\infty(\partial\Omega)}$ 时　$u^k / \| u^k \|_p \in E$

由于 u 取极小，因而

$$I(u) \leqslant I(u^k/\|u^k\|_p) = I(u^k) + I(u^k/\|u^k\|_p) - I(u^k)$$

因在 $\Omega \backslash A_k$ 上 $u^k = u$，从而由上式得

$$\int_{A_k} F(x, u, Du)\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_k} F(x, k, 0)\mathrm{d}x + I(u^k/\|u^k\|_p) - I(u^k) \tag{10}$$

下面估计

$$\begin{aligned} I(u^k/\|u^k\|_p) - I(u^k) &= \int_\Omega [F(x, u^k/\|u^k\|_p, Du^k/\|u^k\|_p) - F(x, u^k, Du^k)]\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega [F(x, u^k/\|u^k\|_p, Du^k/\|u^k\|_p) - F(x, u^k/\|u^k\|_p, Du^k) \\ &\quad + F(x, u^k/\|u^k\|_p, Du^k)]\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, u^k, Du^k)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{11}$$

利用中值定理知，存在 $\theta(x)$ 及 $\theta'(x)$，且 $0 < \theta, \theta' < 1$，使(11)式有

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_\Omega |F_i(x, u^k/\|u^k\|_p, Du^k + \theta(Du^k/\|u^k\|_p - Du^k)\| Du^k(1/\|u^k\| - 1_p)|\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega |F_u(x, u^k + \theta'(u^k/\|u\|_p - u^k), Du^k\| u^k(1/\|u^k\|_p^{-1})|\mathrm{d}x \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{12}$$

因 $\|u^k\|_p \leqslant \|u\|_p = 1$ 故

$$\begin{aligned} 1/\|u^k\|_p - 1 &\leqslant 1/\|u^k\|_p^m - 1 \leqslant 1/\|u^k\|_p^m\Big[\Big(\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\Big)^{m/p} \\ &\quad - \Big(\int_\Omega |u^k|^p\mathrm{d}x\Big)^{m/p}\Big] \leqslant 1/\|u^k\|_p^m\Big(\int_{A_k}|u|^p\mathrm{d}x\Big)^{m/p} \end{aligned} \tag{13}$$

因 $\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x = 1$，故可选 k_0，使当 $k \geqslant k_0$ 时 $\|u^k\|_p \geqslant \frac{1}{2}$，利用条件(iv)，有

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C(1/\|u^k\|_p - 1)\int_\Omega [\sigma(|u^k|/\|u^k\|_p)|Du^k|^m(1 + \theta(1/\|u^k\|_p - 1)^m \\ &\quad + |Du^k|^{m_1}(1 + \theta(1/\|u^k\|_p - 1)^{m_1}]\mathrm{d}x \\ &\leqslant c(1/\|u^k\|_p - 1)\int_\Omega [\sigma(|u|)|Du|^m + |Du|^{m_1}]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

由 $I(u) = \inf_{\nu \in E} I(\nu) = d$ 及(9)式，有

$$d \geqslant \int_\Omega \sigma(|u|)|Du|^m\mathrm{d}x - c\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega \varphi_1(x)|u|^m\mathrm{d}x$$

于是，由 Höler 不等式和 $\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x = 1$ 知

$$\int_\Omega \sigma(|u|)|Du|^m\mathrm{d}x \leqslant c$$

这样，我们得到了

$$I_1 \leqslant C(1/\|u^k\|_p) - 1) \tag{14}$$

下面估计 I_2，类似地，我们有

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \Big\{c\int_\Omega [\sigma(|u^k + \theta'(u^k/\|u^k\|_p - u^k)|)|Du^k|^m + |Du^k|^{m_1} \\ &\quad + |u^k + \theta'(u^k/\|u^k\|_p - u^k)|^s + \varphi(x)|u^k + \theta'(u^k/\|u^k\|_p u^k)|^m]\mathrm{d}x\Big\} \\ &\quad \cdot \{1/\|u^k\|_p - 1\} \leqslant c(1/\|u^k\|_p - 1) \end{aligned} \tag{15}$$

下面估计 $\int_{A_k} F(x, k, o)\mathrm{d}x$ 的上界，不妨设 $F(x, o, o) = 0$

$$F(x, u, o) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}F(x, tu, o)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + F(x, o, o) = \int_0^1 [Fu(x, tu, o)tu] \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\leqslant c\int_0^1 t^{s-1}|u|^s\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi(x)t^{m-1}|u|^m\mathrm{d}t \leqslant c|u|^s + c\varphi(x)|u|^m \tag{16}$$

若 $s \leqslant p$ 则显而易见. 下面只考虑 $s > p$ 情形，将(12) ～ (16) 式代入(10) 式，以及(9)，Hölder 不等式，并注意到 $\int_{A_k}|u|^p\mathrm{d}x \leqslant 1$，可得

$$\int_{A_k}\sigma(|u|)|Du|^m\mathrm{d}x \leqslant c[\int_{A_k}|k|^s\mathrm{d}x + \int_{A_k}\varphi(x)|k|^m\mathrm{d}x + (\int_{A_k}|u|^p\mathrm{d}x)^{m/p}]$$
$$\leqslant c[(\int_{A_k}|u-k|^p\mathrm{d}x)^{m/p} + k^m(\mathrm{mes}\ A_k)^{m/p} + \int_{A_k}|k|^s\mathrm{d}x + \int_{A_k}\varphi(x)|k|^m\mathrm{d}x] \tag{17}$$

我们知　$u - \omega \in W_0^{1,m}(\Omega)$，因而由嵌入定理得

$$\|u-\omega\|_s \leqslant C\|Du - D\omega\|_m \tag{18}$$

从而　$\|u\|_s \leqslant C$　式中 C 只与 d，$\|D\omega\|_m$，$\|\omega\|_s$ 等有关. 由(18) 式

$$\int_{A_k}|k|^s\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_k}|u|^s\mathrm{d}x \leqslant (\int_\Omega|u|^s\mathrm{d}x)^{1-m/s}(\int_{A_k}|u|^s\mathrm{d}x)^{m/s}$$
$$\leqslant c[(\int_{A_k}|u-k|^s\mathrm{d}x)^{m/s} + k^m(\mathrm{mes}A_k)^{m/s}] \tag{19}$$

$$\int_{A_k}|k|^m\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k|u|^m\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant (\int_{A_k}\varphi^r\,\mathrm{d}x)^{1/r}(\int_{A_k}|u|^{rm/(r-1)}\mathrm{d}x)^{(r-1)/r}$$
$$\leqslant c[(\int_{A_k}|u-k|^{mr/(r-1)}\mathrm{d}x)^{(r-1)/r} + k^m(\mathrm{mes}\ A_k)^{(r-1)/r})] \tag{20}$$

将(19)，(20) 两式代入(16)，即得

$$\int_{A_k}\sigma(|u|)|Du|^m\,\mathrm{d}x \leqslant c[(\int_{A_k}|u-k|^k\,\mathrm{d}x)^{m/p} + k^m(\mathrm{mes}\ A_k)^{m/p}$$
$$+ (\int_{A_k}|u-k|^s\mathrm{d}x + k^m(\mathrm{mes}\ A_k)^{m/s} + (\int_{A_k}|u-k|^{rm/(r-1)}\mathrm{d}x)^{(r-1)/r}$$
$$+ k^m(\mathrm{mes}\ A_k)^{1-\frac{1}{r}}] \tag{21}$$

其中 $rm/(r-1)$ 可记为 s_1，由 $r > n/m$ 知 $s_1 < nm/(n-m)$，因 $\sigma(t) \geqslant \lambda > 0$，应用[1]中第二章定理 5.1 及注 5.1，即知 u 有上界.

关于 u 的下方估计，可类似推出，此时，只要利用 $\hat{A}_k$ 代表 A_k，而 $\hat{A}_k = \{x \in \Omega | -u(x) > k\}$. 定理 1 证毕.

应用定理 1，我们有

定理 2　若 $F(x, u, q)$ 满足条件(i) ～ (v) 则问题(1) 存在弱解 $u \in W^{1,m}$，且 $u \in L_\infty(\Omega)$.

证明　首先证明变分问题(2) 的解是存在的，由 Hölder 不等式，得知

$$\int_\Omega|\varphi_1(x)||u|^m \leqslant (\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x)^{m/p}(\int_\Omega|\varphi_1(x)|^{p/(p-m)}\mathrm{d}x)^{(p-m)/p}$$

由上不等式及(9) 式，推知 $I(u)$ 满足限制性条件，即

$$\int_\Omega F(x, u, Du)\mathrm{d}x \geqslant C\|u\|^m_{W^{1,m}} - C \tag{22}$$

由式(22)及条件(i)(ii)(iii)，我们可与〔1〕中第五章定理2.1类似地证明问题(2)的解u存在. 再利用定理1知

$$u \in L_\infty(\Omega)$$

从而$I(u)$可微，故由

$$\left.\frac{\mathrm{d}I(u+t\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$$

即可推出u满足

$$\int_\Omega [F_i(x,u,Du)D_i\varphi+F_u(x,u,Du)\varphi]\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x$$

$$\forall\ \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$$

式中，$\lambda=\int_\Omega [F_i(x,u,Du)D_iu+F_u(x,u,Du)]\,\mathrm{d}x$. 定理2证毕.

下面给出问题(1)的弱解的正则性结果.

定理3 若$F(x,u,q)$满足定理2的条件，则问题(1)的弱解 $u(x)\in C^\alpha(\Omega)$.

证明 由定理2知，问题(1)的弱解$u(x)\in L_\infty(\Omega)$. 对于$x_0\in\Omega$，$0<t<\rho$，$B_\rho(x_0)\subset\Omega$，令$\eta\in C_0^\infty(B_\rho(x_0))$，且 $0\leqslant\eta\leqslant 1$， $x\in B_t(x_0)$时，$\eta=1$

$|D\eta|\leqslant 2/(\rho-t)$. 设$v=u-\eta(u-k)^+$，$k>0$，

根据Lebesque积分的绝对连续性，可选ρ充分小，使

$$\int_{B_\rho(n_0)}|u|^p\mathrm{d}x<\frac{1}{2}$$

因此

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\Omega\setminus A_\rho(x_0)}|v|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nu\}^p\mathrm{d}x\leqslant 1$$

于是

$$I(u)\leqslant I(v)+I(v/\|v\|_p)-I(v)\equiv I(v)+I^* \tag{23}$$

那么
$$\int_{A_{k,\rho}}F(x,u,Du)\mathrm{d}x\leqslant\int_{A_{k,\rho}}F(x,v,Dv)\mathrm{d}x+I^*$$

其中
$$A_{k,\rho}=\{x|x\in B_\rho(x_0),\ |u|>k\},$$

类似于定理2的证明中的估计，我们知

$$I^*\leqslant c(1/\|v\|_p-1)\leqslant c(1/\|v\|_p^p-1)\leqslant c(\int_{A_{k,\rho}}|u|^p\mathrm{d}x-\int_{A_{k,\rho}}|v|^p\mathrm{d}n$$
$$\leqslant c\ \mathrm{mes}\ A_{k,\rho}$$

又因
$$\int_{A_{k,\rho}}F(x,v,Dv)\mathrm{d}x=\int_{A_{k,\rho}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x,v,tDv)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{A_{k,\rho}}\int_0^1F_i(x,v,tDv)D_i\nu\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\leqslant c\int_{A_{k,\rho}}[|Dv|^m+|Dv|^{m_1}]\mathrm{d}x$$

这样，从(23)式可得：

$$\int_{A_{k,\rho}}|Du|^m\mathrm{d}x\leqslant c[\int_{A_{k,\rho}}(1-\eta)^m|Du|^m\mathrm{d}x+\int_{A_{k,\rho}}\omega^m|D\eta|^m\mathrm{d}x+\mathrm{mes}\ A_{k,\rho}].$$

因而，可同文献〔4〕类似证明，$u\in B_m$(B_m是〔1〕中的B_m)，应用文〔1〕的第二章的定理，可证明 $u\in c^\alpha(\Omega)$.

参 考 文 献

1 Ladyzenskaya O A, Uralt´zeva, N N. Linear and quasilinear elliptic equations. Second Russian Edition, Moscow, Nauka, 1973

2 Giaquinta M. Multiple integals in the calcus of variations and nonlinear elliptic systems, Princeton University Press, 1983

3 Shen Yaotian, Ma Runian. On the natural growth quasiliner elliptic equations. J. Partial differential Equations, 1991, 4(1):57～64

4 Giaquinta M. Guisti E. On the vequlauty of the minima of variational integrals. Acta Math. 1982, 148:31～46

Elgenvalue Problem of Elliptic Euler Equations with the Natural Growth Condition

*Shen Yaotian** 　*Ma Ruaian*

Abstract We consider the eigenvalue problem of elliptic Euler equations under the natural growth condition, we consider multiple integrals of the $F(x,u,Du)$ then we know that the variational problem under some sufficient conditions relevant to $F(x,u,q)$, yields its solution. A similar method can be used to prove the existence of the solution to the variational problem I(u), which I(u) is restricted on E.

Keywords Natural growth, elliptic Euler equation, eigenvalue problem, variational method

* South China University of Technolegy, Guangzhou 510650