第 33 卷 第 3 期
1994 年 7 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 33 No. 3
Jul. 1994

两点边值问题的二次广义差分法*

陈 仲 英

(中山大学计算机科学系，广州 510275)

摘 要 给出两点边值问题的基于二次 Lagrange 元的一种新的广义差分格式，得到最佳收敛性估计并给出算例. 理论分析和数值试验表明 格式简单而有效.

关键词 两点边值问题，二次 Lagrange 元，广义差分法

分类号 O241.81

文 [1] 基于 Galerkin－Petrov 方法，就两点边值问题提出广义差分法，它既具有有限元法高阶逼近的优点，又保持差分法计算简单的特点. 随后文 [2] 给出一种基于二次 Lagrange 元的广义差分格式，其试验函数空间采用二次 Lagrange 有限元，检验函数空间采用分段线性函数类. 在解函数 $u\in C^3$ 的条件下得到与二次有限元法相同的收敛阶，而工作量则有所减少. 这种方法，实际上是一种非标准有限元法. 本文的不同之处在于：检验函数空间 V_h 取为分段常数函数类，并对相应的双线性形式作广义函数意义的理解. 这样使方法有了实质性的变化，格式的计算亦更为简单，工作量大为减少. 而理论分析虽然由于 $V_h\not\subset H^1$ 带来一定困难，却在解函数 $u\in H^3$ 的条件下得到了最佳收敛性估计. 最后的算例数值效果良好，表明格式简单有效. 我们曾用这一方法计算和模拟了单孤立波的传播和双孤立波相碰撞的过程，效果很好[3].

1 二次元差分格式

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} Lu \equiv -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu = f, \quad a < x < b \\ u(a) = 0, \quad u'(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$p \in C^1(I)$，$p(x) \geqslant p_0 > 0$，$q \in C^1(I)$，$q(x) \geqslant 0$，$f \in L^2(I)$，$I = [a,b]$.

对区间 I 作剖分 T_h，节点为

收稿日期：1993-10-30

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $h_i = x_i - x_{i-1}$. 记 $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$. 并设剖分是正则的，即有正常数 μ 使得 $h_i \geqslant \mu h (i = 1,2,\cdots,n)$. 又单元中点 $x_{i-\frac{1}{2}} = (x_{i-1} + x_i)/2$ 作为插值节点.

试探函数空间 U_h 取为相应于 T_h 的 Lagrange 型二次有限元空间，与整数节点 x_i 和半整数节点 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 相应的基函数分别为 $\varphi_i(x)$，$\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x)$.

在单元 I_i 上，

$$u_h = u_{i-1}(2\xi - 1)(\xi - 1) + 4u_{i-\frac{1}{2}}\xi(1 - \xi) + u_i(2\xi - 1)\xi \tag{2}$$

$$u'_h = u_{i-1}(4\xi - 3)/h_i + u_{i-\frac{1}{2}}(-8\xi + 4)/h_i + u_i(4\xi - 1)/h_i \tag{3}$$

其中，$\xi = (x - x_{i-1})/h_i$，$u_i = u_h(x_i)$，$u_{i-\frac{1}{2}} = u_h(x_{i-\frac{1}{2}})$.

再作对偶剖分 T_h^*，节点为

$$a = x_0 < x_{\frac{1}{4}} < x_{\frac{3}{4}} < \cdots < x_{n-\frac{3}{4}} < x_{n-\frac{1}{4}} < x_n = b,$$

其中，$x_{i-\frac{k}{4}} = x_i - \frac{k}{4}h_i (k = 1,3;\ i = 1,2,\cdots,n)$.

检验函数空间 V_h 取为相应于 T_h^* 的分片常数函数空间，即与整数节点 x_i 和半整数节点 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 相应的基函数分别为

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x_{i-\frac{1}{4}} \leqslant x \leqslant x_{i+\frac{1}{4}} \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

$$\psi_{i-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 1, & x_{i-\frac{3}{4}} \leqslant x \leqslant x_{i-\frac{1}{4}} \\ 0, & \text{在别处} \end{cases}$$

采用上述子空间 U_h 和 V_h，相应的二次元差分格式为：求 $u_h \in U_h$，使得

$$\begin{cases} a(u_h, \psi_j) = (f, \psi_j), & j = 1,2,\cdots,n \\ a(u_h, \psi_{j-\frac{1}{2}}) = (f, \psi_{j-\frac{1}{2}}), & j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{4}$$

其中
$$a(u_h, \psi) = \int_a^b (pu'_h\psi' + qu_h\psi)\mathrm{d}x$$

按广义函数意义理解，即

$$\begin{aligned} a(u_h, \psi_j) &= \int_a^b [pu'_h(\delta(x - x_{j-\frac{1}{4}}) - \delta(x - x_{j+\frac{1}{4}})) + qu_h\psi_j]\mathrm{d}x \\ &= 2p_{j-\frac{1}{4}}(u_j - u_{j-\frac{1}{2}})/h_j - 2p_{j+\frac{1}{4}}(u_{j+\frac{1}{2}} - u_j)/h_{j+1} + \int_{x_{j-\frac{1}{4}}}^{x_{j+\frac{1}{4}}} qu_h\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a(u_h, \psi_{j-\frac{1}{2}}) &= \int_a^b [pu'_h(\delta(x - x_{j-\frac{3}{4}}) - \delta(x - x_{j-\frac{1}{4}})) + qu_h\psi_j]\mathrm{d}x \\ &= 2p_{j-\frac{3}{4}}(u_{j-\frac{1}{2}} - u_{j-1})/h_j - 2p_{j-\frac{1}{4}}(u_j - u_{j-\frac{1}{2}})/h_j + \int_{x_{j-\frac{3}{4}}}^{x_{j-\frac{1}{4}}} qu_h\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6}$$

上述各式中 $u_0 = 0$，而当 $j = n$ 时要去掉与 $x_n = b$ 右侧有关的量. 为此规定

$$p_{n+\frac{1}{4}} = 0, \quad x_{n+\frac{1}{4}} = x_n.$$

如果利用数值积分方法将左端积分作近似处理，可得相应于 x_j 和 $x_{j-\frac{1}{2}}$ 的差分方程

$$a_h(u_h, \psi_j) \equiv p_{j-\frac{1}{4}}\frac{2(u_j - u_{j-\frac{1}{2}})}{h_j} - p_{j+\frac{1}{4}}\frac{2(u_{j+\frac{1}{2}} - u_j)}{h_{j+1}} + \frac{h_j + h_{j+1}}{4}q_j u_j$$

$$= \int_{x_{j-\frac{1}{4}}}^{x_{j+\frac{1}{4}}} f\mathrm{d}x,\ j = 1,2,\cdots,n \tag{7}$$

$$a_h(u_h,\psi_{j-\frac{1}{2}}) \equiv p_{j-\frac{3}{4}}\frac{2(u_{j-\frac{1}{2}} - u_{j-1})}{h_j} - p_{j-\frac{1}{4}}\frac{2(u_j - u_{j-\frac{1}{2}})}{h_j} + \frac{h_j}{2}q_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}$$
$$= \int_{x_{j-\frac{3}{4}}}^{x_{j-\frac{1}{4}}} f\mathrm{d}x,\ j = 1,2,\cdots,n \tag{8}$$

2　收敛性估计

(2),(3) 式启示我们引入如下的离散范数

$$|u_h|_{0,h} = \left\{\sum_{i=1}^{n} h_i(u_{i-1}^2 + u_{i-\frac{1}{2}}^2 + u_i^2)\right\}^{1/2} \tag{9}$$

$$|u_h|_{1,h} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-1})^2 + (u_i - u_{i-\frac{1}{2}})^2\right]/h_i\right\}^{1/2} \tag{10}$$

定理 1　在 U_h 中，$|\cdot|_{0,h}$ 与 $|\cdot|_0$ 等价，$|\cdot|_{1,h}$ 与 $|\cdot|_1$ 等价，即存在与 U_h 无关的正常数 C_1,C_2,C_3,C_4 使得

$$C_1|u_h|_{0,h} \leqslant |u_h|_0 \leqslant C_2|u_h|_{0,h},\quad \forall\ u_h \in U_h \tag{11}$$

$$C_3|u_h|_{1,h} \leqslant |u_h|_1 \leqslant C_4|u_h|_{1,h},\quad \forall\ u_h \in U_h \tag{12}$$

证明　由(3)式，

$$|u_h|_1^2 = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(u'_h)^T u'_h\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} h_i\sigma_i^T A\sigma_i,$$

其中 $\sigma_i = [(u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-1})/h_i, (u_i - u_{i-\frac{1}{2}})/h_i]^T$，$A$ 为正定矩阵. 由此可推得(12)式. (11)式同理可证. 证毕.

设 Π_h 和 Γ_h 分别为 $U = H_E^1(I) = \{u | u \in H^1(I), u(a) = 0\}$ 到 U_h 和 V_h 的插值算子：$\forall\ u \in U$，

$$\Pi_h u = \sum_{j=1}^{n}(u_{j-\frac{1}{2}}\varphi_{j-\frac{1}{2}} + u_j\varphi_j),\quad \Gamma_h u = \sum_{j=1}^{n}(u_{j-\frac{1}{2}}\psi_{j-\frac{1}{2}} + u_j\psi_j) \tag{13}$$

定理 2　当 h 充分小时，$a(u_h,\Gamma_h u_h)$ 正定，即存在与子空间无关的常数 $\alpha > 0$，使得

$$a(u_h,\Gamma_h u_h) \geqslant \alpha|u_h|_1^2,\quad \forall\ u_h \in U_h \tag{14}$$

证明　先证 $a_h(u_h,\Gamma_h u_h)$ 正定. 我们有

$$a_h(u_h,\Gamma_h u_h) = \sum_{j=1}^{n}\left[2p_{j-\frac{3}{4}}(u_{j-\frac{1}{2}} - u_{j-1})^2/h_j + 2p_{j-\frac{1}{4}}(u_j - u_{j-\frac{1}{2}})^2/h_j\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_j}{2}q_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}^2 + \frac{h_j + h_{j+1}}{4}q_j u_j^2\right) \geqslant 2p_0|u_h|_{1,h}^2.$$

再用(12)式知有 $\alpha' > 0$ 使

$$a_h(u_h,\Gamma_h u_h) \geqslant \alpha'|u_h|_1^2,\quad \forall\ u_h \in U_h \tag{15}$$

再证 $a(u_h,\Gamma_h u_h)$ 的正定性. 首先有

$$|a(u_h,\Gamma_h u_h) - a_h(u_h,\Gamma_h u_h)| = \left|\sum_{j=1}^{n} u_{j-\frac{1}{2}}\left(\int_{x_{j-\frac{3}{4}}}^{x_{j-\frac{1}{4}}} q u_h\mathrm{d}x - \frac{h_j}{2}q_{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{n}u_j\left(\int_{x_{j-\frac14}}^{x_{j+\frac14}}qu_h\mathrm{d}x-\frac{h_j+h_{j+1}}{4}q_ju_j\right)\Bigg|$$

$$\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\begin{array}{l}\left(\int_{x_{j-\frac34}}^{x_{j-\frac14}}(qu_h-q_{j-\frac12}u_{j-\frac12})\mathrm{d}x\right)^2\\+\left(\int_{x_{j-\frac14}}^{x_{j+\frac14}}(qu_h-q_ju_j)\mathrm{d}x\right)^2\end{array}\right]\right\}^{1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n}(u_{j-\frac12}^2+u_j^2)\right\}^{1/2}\tag{16}$$

利用 Newton-Leibniz 公式和 Cauchy 不等式可得

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\int_{x_{j-\frac34}}^{x_{j-\frac14}}(qu_h-q_{j-\frac12}u_{j-\frac12})\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{x_{j-\frac14}}^{x_{j+\frac14}}(qu_h-q_ju_j)\mathrm{d}x\right)^2\right]\right\}^{1/2}$$
$$\leqslant Ch^{3/2}|qu_h|_1\leqslant Ch^{3/2}|u_h|_1\tag{17}$$

由剖分的正则性和(11)式有

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}(u_{j-\frac12}^2+u_j^2)\right\}^{1/2}\leqslant Ch^{-1/2}|u_h|_{0,h}\leqslant Ch^{-1/2}|u_h|_0\leqslant Ch^{-1/2}|u_h|_1\tag{18}$$

联合(16)～(18)得

$$|a(u_h,\Gamma_hu_h)-a_h(u_h,\Gamma_hu_h)|\leqslant Ch|u_h|_1^2.$$

据上式及(15)式知结论成立. 证毕.

定理 3 设问题(1)的解 $u\in H^3(I)$，u_h 是二次元差分格式(4)的解，则有如下误差估计

$$|u-u_h|_1\leqslant Ch^2|u|_3\tag{19}$$

证明 显然有

$$a(u-u_h,v_h)=0,\quad\forall v_h\in V_h\tag{20}$$

据式(14)和(20)有

$$|u_h-\Pi_hu|_1\leqslant\frac{1}{\alpha}\sup_{w_h\in U_h}\frac{|a(u-\Pi_hu,\Gamma_hw_h)|}{|w_h|_1}\tag{21}$$

又

$$\begin{aligned}a(u-\Pi_hu,\Gamma_hw_h)&=\sum_{j=1}^{n}[w_{j-\frac12}a(u-\Pi_hu,\psi_{j-\frac12})+w_ja(u-\Pi_hu,\psi_j)]\\&=\sum_{j=1}^{n}[p_{j-\frac34}(u-\Pi_hu)'_{j-\frac34}(w_{j-\frac12}-w_{j-1})+p_{j-\frac14}(u\\&\quad-\Pi_hu)'_{j-\frac14}(w_j-w_{j-\frac12})]+\sum_{j=1}^{n}[w_{j-\frac12}\int_{x_{j-\frac34}}^{x_{j-\frac14}}q(u\\&\quad-\Pi_hu)\mathrm{d}x+w_j\int_{x_{j-\frac14}}^{x_{j+\frac14}}q(u-\Pi_hu)\mathrm{d}x].\end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式和(12),(18)式得

$$|a(u-\Pi_hu,\Gamma_hw_h)|$$
$$\leqslant Ch^{1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n}[((u-\Pi_hu)'_{j-\frac34})^2+((u-\Pi_hu)'_{j-\frac14})^2]\right\}^{1/2}|w_h|_1$$
$$+Ch^{1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\int_{x_{j-\frac34}}^{x_{j-\frac14}}|u-\Pi_hu|\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{x_{j-\frac14}}^{x_{j+\frac14}}|u-\Pi_hu|\mathrm{d}x\right)^2\right]\right\}^{1/2}|w_h|_1.\tag{22}$$

据 Rolle 定理，有 $\eta_1 \in (x_{j-1},\ x_{j-\frac{1}{2}})$，$\eta_2 \in (x_{j-\frac{1}{2}},x_j)$，$\eta_3 \in (\eta_1,\eta_2)$ 使

$$(u-\Pi_h u)'(\eta_1)=0,\quad (u-\Pi_h u)'(\eta_2)=0,\quad (u-\Pi_h u)''(\eta_3)=0.$$

于是，

$$\left|(u-\Pi_h u)'_{j-\frac{3}{4}}\right| = \left|\int_{\eta_1}^{x_{j-\frac{3}{4}}}\left(\int_{\eta_3}^{x}(u-\Pi_h u)'''\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant h^{3/2}\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j}|u'''|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

由此可知

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left((u-\Pi_h u)'_{j-\frac{3}{4}}\right)^2+\left((u-\Pi_h u)'_{j-\frac{1}{4}}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \leqslant Ch^{3/2}|u|_3 \tag{23}$$

别方面，

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\int_{x_{j-\frac{3}{4}}}^{x_{j-\frac{1}{4}}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_{x_{j-\frac{1}{4}}}^{x_{j+\frac{1}{4}}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\right)^2\right]\right\}^{1/2} \leqslant h^{1/2}|u-\Pi_h u|_0 \leqslant h^{7/2}|u|_3 \tag{24}$$

将(23)、(24)代入(22)得

$$|a(u-\Pi_h u,\Gamma_h w_h)| \leqslant Ch^2|u|_3|w_h|_1,$$

再据(21)式和插值逼近性质知(19)式成立. 证毕.

3　数值例子

用通常的二阶中心差分格式(FDM)和上面所述的二次广义差分法(GDM)求解下列边值问题：

$$\begin{cases}-u''(x)=x^2,\\ u(0)=0,\ u'(\pi)=0.\end{cases}$$

取网格步长 $h=\pi/n$. 问题的精确解(ES)为

$$u=\frac{1}{3}\pi^3x-\frac{1}{12}x^4.$$

记 $x_i=i\pi/16$，$i=1,2,\cdots,16$. 两种方法算出的数值结果见表 1. 可以看到，(GDM)的计算结果比(FDM)精确得多.

表1　数值结果表

Tab. 1　Numerical Results

		x2	x4	x6	x8	x10	x12	x14	x16
n=2	FDM				18.26438				30.44063
	GDM		8.10157		15.79093		21.92656		24.60594
n=4	FDM		8.37117		16.36184		22.83047		25.87453
	GDM	4.05772	8.08968	12.02453	15.74336	19.07971	21.81954	23.70125	24.41569
n=8	FDM	4.09046	8.15714	12.12869	15.88020	19.26321	22.04567	23.97199	24.73301
	GDM	4.05698	8.08671	12.01784	15.73147	19.06113	21.79279	23.66484	24.36813
n=16	FDM	4.06519	8.10363	12.04336	15.76729	19.10714	21.84047	23.73269	24.44763
	GDM	4.05679	8.08596	12.01617	15.72850	19.05649	21.78610	23.65573	24.35624
	ES	4.05677	8.08579	12.01572	15.72766	19.05512	21.78407	23.65292	24.35250

参考文献

1 李荣华. 两点边值问题的广义差分法. 吉林大学自然科学学报，1982（1）：26～40

2 向新民. 解两点边值问题的广义差分法——Lagrange二次元. 黑龙江大学学报，1982（2）：25～34

3 陈铭俊，陈仲英. RLW方程的Lagrange型二次广义差分法和双孤立波碰撞过程的数值模拟. 应用数学与计算数学学报，1993，7（2）：21～32

Second Order Generalized Difference Method for the Two－Point Boundary Value Problem

Chen Zhongying *

Abstract A new generalized difference method based on 2nd order Lagrange element is presented for the two－point boundary value problem. The optimal error estimate is obtained and a numerical example is given. The scheme is simple and effective.

Keywords two－point boundary value problem, 2nd order Lagrange element, generalized difference method

* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275