

## 一个矩阵问题的判定算法\*

肖金声

周作领

(中山大学计算中心, 广州 510275) (中山大学科学计算与计算机应用系)

**摘 要** 本文为非负方阵不可约性和非周期性的判定给出了实现算法. 作为非构造性的求解算法, 这是个典型的例子.

**关键词** 相关图, 单环, 周期, 互素

**分类号** Q81

文[1]为非负方阵  $A$  引进了一种相关图  $G(A)$ : 顶点由  $A$  的非零元素组成; 从顶点  $a_{ij}$  到  $a_{mn}$  有一条有向边, 若  $j=m$ . 然后证明:

(i) 非负方阵  $A$  不可约, 当且仅当有环路过相关图  $G(A)$  的所有顶点;

(ii) 非负方阵  $A$  非周期, 当且仅当  $A$  不可约, 且  $G(A)$  中有两条环路周期互素. 这里所谓的周期, 意指该环路的长度.

本文补足其判定算法的实现. 由非负方阵构造相关图比较容易, 故我们的讨论专注不可约性和非周期性.

### 1 不可约性

判不可约性在于是否有一条环路过相关图的所有顶点. 这显然不同于判是否有单环(无重复顶点的简单环路)过所有顶点的哈密顿环问题. 但是, 如果试图寻求一个构造性的算法找出过所有顶点的环路(允许多次重复任一顶点), 将是十分困难的.

我们的算法基于一个显然的事实: 图中有环过所有顶点, 当且仅当图中所有相交单环所含顶点集之并为该图顶点全集. 假定图中顶点按  $1, \dots, t$  编号, 下面是找出图中所有单环的算法概要:

```
algorithm all_circuits;  
begin  
  for  $i := 1$  to  $t$  do  
    除去编号为  $1, \dots, i-1$  的顶点;  
    在余下的子图中找出由顶点  $i$  出发的所有单环  
  end for
```

收稿日期: 1994-05-16

\* 广东省自然科学基金资助项目

end;

在子图中寻找过顶点  $i$  的所有单环；只须从顶点  $i$  出发对子图进行带回溯的深先搜索，中途一旦有搜索点到出发点  $i$  有边，便得一环。这同哈密顿环算法有点相似。

带回溯的深先搜索保证找出过  $i$  的所有单环，且不重复；去掉前  $i-1$  点的作用是使第  $i$  步找出的环不同于前  $i-1$  步找出的那些。

假定共有  $K$  个单环，便不难判不可约性：

algorithm irreducibility;

begin

$U := \{\text{第 } 1 \text{ 环}\};$

    for  $i := 2$  to  $K$  do

        for  $j := K$  downto  $i$  do

            if {第  $j$  环} 与  $U$  相交 then

$U := U + \{\text{第 } j \text{ 环}\};$

        if  $U = \text{全集}$  then 矩阵为不可约的

        else 矩阵非不可约的

    end;

此算法相当简单，但若将内层循环改为

    for  $j = i$  to  $K$  do ...

则达不到目的。例如，考虑第 1, 2 环不相交，但均与第  $K$  环相交的情况。

## 2 非周期性

显然，图中所有环路皆由前节所得那组单环组合而成。为判非周期性，本应当在由这  $K$  个单环组成的所有可能的环路中证实有无两条周期互素。但若依靠下述定理，便可获得更简单的算法：

**定理** 若非负方阵  $A$  不可约，则其相关图  $G(A)$  中有两条环路周期互素，当且仅当  $G(A)$  的所有单环周期互素。

**证明** 必要性。若非所有单环周期互素，设公因子  $g > 1$ ，则由这组单环组成的任何环路均含因子  $g$ 。

充分性。设  $K$  个单环的周期分别为  $p_1, \dots, p_k$ ，且  $d(p_1, \dots, p_k) = 1$ 。据互素整数的基本性质知，存在整数  $q_1, \dots, q_k$ ，使得

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_k q_k = 1$$

将左方正负项分别求和得  $M = N + 1$ 。这时，只要将相应于正项和负项的单环分两组分别与过所有顶点的环路相并，便得两条周期互素的环。因为对任何环路周期  $L$ ，总有  $L + M = L + N + 1$ 。

这样，我们只须求出  $K$  个单环周期的公因子便可判定非周期性了，算法从略。

## 3 算法复杂度

由于求所有环路同求哈密顿环相似，算法的复杂度理论上也是  $np$  难度的。然而，相关图的构造决定了可能的  $n^2$  个顶点中，每个顶点的度均不超过  $2n$ 。可见相关图远非

完全图, 加之所判非负方阵往往是稀疏的, 故算法的运行效率令人满意.

### 参 考 文 献

- 1 周作领, 肖金声. 非负方阵不可约性和非周期性判定与算法, 科学通报, 1992, 37(4), 300~301
- 2 Sara, Baase, Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis, Addison \_ Wesley Publishing Company, 1978

## The Deciding Algorithm for a Matrix Problem

*Xiao Jinsheng\* Zhou Zuoling*

**Abstract** This paper gives an effective algorithm for deciding of irreducibility and aperiodicity of nonnegative matrices. As a nonconstructive algorithm for solutions, this is a typical example.

**Keywords** contact graph, simple circuit, cycle, prime each other

---

\* Computer Centre, Zhongshan University, Guangzhou 510275