

半线性系统的能达域*

陈云烽

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 本文研究一类半线性系统的能达域, 应用 Hilbert 空间线性算子广义逆的理论和 Sadoskii 不动点定理, 导出了系统能达域的若干解析式.

关键词 半线性系统, 能达域, 线性算子广义逆

分类号 O231, TP271.72

考虑半线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$ 分别是系统的状态变量和控制变量, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $f(\cdot) \in C[R^n, R^n]$, $u(\cdot) \in L_2[J, R^r]$, J 是区间 $[0, T]$.

对系统(1)能控性和能达性的研究, 通常都假定相应的线性系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2)$$

完全能控^[1]. 本文运用 Hilbert 空间线性算子广义逆的理论, 打破这个限制, 并在 $\|f(x)\| \leq C \|x\|^\sigma$ ($\sigma \geq 0$) 的条件下, 导出系统(1)的能达域的解析式.

定义 1 设 $x_f \in R^n$, 如果存在 $u(\cdot) \in L_2[J, R^r]$ 使系统(1)在其作用下, 由初态 $x(0) = 0$ 出发的状态轨迹 $x(t)$ ($t \in J$) 有终态 $x(T) = x_f$, 则称 x_f 为系统(1)在区间 J 上的能达状态.

定义 2 设区域 $D \subset R^n$, 如果对任意的 $x_f \in D$, 都是系统(1)在区间 J 上的能达状态, 则称 D 是系统(1)在区间 J 上的能达域.

对任意给定的 $u(\cdot) \in L_2[J, R^r]$, 系统(1)满足 $x(0) = 0$ 的解 $x(t)$ ($t \in J$) 相当于积分方程

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} [f(x(s)) + Bu(s)] ds \quad (3)$$

的解, 因此, 终态 $x(T) = x_f$ 相当于

$$\int_0^T e^{A(T-s)} [f(x(s)) + Bu(s)] ds = x_f.$$

引入线性算子 $K: L_2[J, R^r] \rightarrow R^n$ 定义如下:

收稿日期: 1994-04-25

* 国家自然科学基金资助项目

$$Ku \triangleq \int_0^T e^{A(T-s)} Bu(s) ds,$$

如果记

$$W(t) \triangleq \int_0^t e^{-As} BB' e^{-A's} ds, \quad t \in J,$$

那么,由 Hilbert 空间上线性算子广义逆的理论^[2],知算子 K 的广义逆为

$$K^+ = B' e^{-A't} W^+(T) e^{-AT},$$

这里, A', B' 分别是 A, B 的转置, $W^+(T)$ 是矩阵 $W(T)$ 的广义逆矩阵.

其次,引入算子 $G: C[J, R^n] \rightarrow C[J, R^n]$ 定义如下:

$$(Gx)(t) \triangleq e^{At} \int_0^t e^{-As} f(x(s)) ds + e^{At} \int_0^t e^{-As} BK^+(x_f - \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(x(\tau)) d\tau) ds,$$

则有定理:

定理 1 如果对于 $x_f \in R^n$ 和 $T > 0$, 算子 G 有不动点 $x(t)$ ($t \in J = [0, T]$) 满足条件

$$(x_f - \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(x(\tau)) d\tau) \in Z(K) \quad (4)$$

其中, $Z(K)$ 表示 K 的像空间, 那么状态 x_f 是系统(1)在 J 上的能达状态.

证明 因为 $x(t)$ ($t \in J$) 是 G 的不动点, 所以, $x(t)$ 恰好是积分方程(3)相应于控制

$$u(t) = K^+(x_f - \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(x(\tau)) d\tau), \quad t \in J \quad (5)$$

的解, 且有 $x(0) = 0$; 其次, 因为条件(4)满足, 根据广义逆性质^[2], 由式(5)可知有

$$Ku = x_f - \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(x(\tau)) d\tau,$$

因此有

$$x(T) = (Gx)(T) = \int_0^T e^{A(T-s)} f(x(s)) ds + x_f - \int_0^T e^{A(T-\tau)} f(x(\tau)) d\tau = x_f,$$

于是, x_f 是系统(1)在 J 上的能达状态.

记 $h(t, T, x_f) = e^{At} W(t) W^+(T) e^{-AT} x_f$,

$$H_1(t, T) = e^{At} (I - W(t) W^+(T)),$$

$$H_2(t, T) = e^{At} W(t) W^+(T),$$

则算子 G 可写成

$$(Gx)(t) = h(t, T, x_f) + H_1(t, T) \int_0^t e^{-As} f(x(s)) ds - H_2(t, T) \int_0^T e^{-As} f(x(s)) ds, \quad t \in J$$

引入如下记号:

$$\alpha(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \| e^{At} W(t) W^+(T) e^{-AT} \|$$

$$p_1(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \| H_1(t, T) \|$$

$$p_2(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \| H_2(t, T) \|$$

$$p(T) = \max\{p_1(T), p_2(T)\}$$

$$q(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \| e^{-At} \|$$

$$m(\eta) = \max_{\|x\| \leq \eta} \| f(x) \|, \quad \eta \geq 0$$

这里, 矩阵的范数采用与 R^n 范数相容的范数.

引理 1 对给定的 $x_f \in R^n$ 和 $T > 0$, 如果不等式组

$$\begin{cases} \alpha(T) \|x_f\| \leq \eta & (6) \\ T p(T) q(T) m(2\eta) \leq \eta & (7) \end{cases}$$

有非负解 $\eta \geq 0$, 则算子 G 存在不动点.

证明 在函数空间 $C[J, R^n]$ 中, 取有界闭子集

$$F \triangleq \{x(\cdot) \mid \|x(\cdot) - h(\cdot, T, x_f)\| \leq \eta\},$$

当 $x(\cdot) \in F$ 时, 对任意 $t \in J$, 有

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(\cdot)\| \leq \|h(\cdot, T, x_f)\| + \eta \\ &= \max_{t \in J} \|h(t, T, x_f)\| + \eta \leq \alpha(T) \|x_f\| + \eta \leq 2\eta, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\|(Gx)(t) - h(t, T, x_f)\| \\ &\leq \|H_1(t, T)\| \int_0^t \|e^{-As}\| \cdot \|f(x(s))\| ds + H_2(t, T) \int_5^T \|e^{-As}\| \cdot \|f(x(s))\| ds \\ &\leq p(T) \int_0^T q(T) m(2\eta) ds = T p(T) q(T) m(2\eta) \leq \eta, \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

因此, $Gx \in F$, 即 G 是映 F 入 F 的算子.

根据 G 的定义, 可知 G 是连续算子, 函数族 $\{Gx \mid x(\cdot) \in F\}$ 在 J 上一致有界且等度连续. 因此, 对 F 中的任意有界子集 E , 都有

$$\gamma(G(E)) = \sup_{t \in J} \gamma\{(Gx)(t) \mid x(\cdot) \in E\}, \quad (8)$$

这里, γ 表示 Kuratowski 非紧测度, 集合

$$G(E) = \{Gx \mid x(\cdot) \in E\} \subset F.$$

公式(8)的证明见[3]的引理 1.4.1.

记 R^n 中的子集

$$\begin{aligned} Q_t &= \{e^{At} W(t) W^+(T) e^{-As} f(x(s)) \mid x(\cdot) \in E, 0 \leq s \leq T\}, \\ S_t &= \{e^{A(t-s)} f(x(s)) \mid x(\cdot) \in E, 0 \leq s \leq T\}, \end{aligned}$$

式中 $t \in J$. 则它们都是 R^n 中的有界集, 故

$$\gamma(Q_t) = 0, \quad \gamma(S_t) = 0.$$

利用公式

$$\frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \in \overline{CO}\{y(s) \mid 0 \leq s \leq T\}, \quad \forall y(\cdot) \in C[J, R^n],$$

式中 \overline{CO} 表示闭包, 根据非紧测度性质, 得

$$\begin{aligned} \gamma\{(Gx)(t) \mid x(\cdot) \in E\} &\leq \gamma\left\{\int_0^t e^{A(t-s)} f(x(s)) ds \mid x(\cdot) \in E\right\} \\ &\quad + \gamma\left\{\int_0^T e^{At} W(t) W^+(T) e^{-As} f(x(s)) ds \mid x(\cdot) \in E\right\} \\ &\leq \gamma(t \overline{CO} S_t) + \gamma(T \overline{CO} Q_t) = t \gamma(\overline{CO} S_t) + T \gamma(\overline{CO} Q_t) = 0, \end{aligned}$$

即有

$$\gamma\{(Gx)(t) \mid x(\cdot) \in E\} = 0, \quad \forall t \in J.$$

根据式(8)得 $\gamma(G(E)) = 0$.

因为 E 是 F 中的任意有界集, 所以由以上讨论知 G 是映 F 入 F 的 0-集压缩算子, 根据 Sadvshii 不动点定理^[3], 算子 G 在 F 中有不动点.

定理 2 对给定的 $T > 0$, 如果不等式

$$Tp(T)q(T)m(2\eta) \leq \eta$$

有解 $\eta_0 > 0$, 那么, 如果 R^n 中的 x_f 满足

$$\|x_f\| \leq \alpha^{-1}(T)\eta_0,$$

且相应于 x_f 和 T 的算子 G 的不动点 $x(t) (t \in J)$ 使得向量

$$x_f - \int_0^T e^{A(T-s)} f(x(s)) ds \quad (9)$$

可用矩阵 $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ 的列向量线性表示, 则 x_f 是系统 (1) 在 J 上的能达状态.

证明 根据线性系统的一般理论^[4], 当 (9) 式所示的向量可用 $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ 的列向量线性表示时, 式 (4) 得以成立, 而根据引理 1, 算子 G 的不动点 $x(t)$ 在本定理的假设下得以存在, 因此, 由定理 1 知本定理成立.

定理 3 如果系统 (1) 相应的线性系统 (2) 完全能控, $f(0) = 0$ 且

$$\|f(x)\| \leq C \|x\|^\sigma, \quad \forall x \in R^n \quad (10)$$

式中 $C > 0, \sigma \geq 0$, 那么, 对给定的 $T > 0$, 有

(i) 当 $0 \leq \sigma < 1$ 时, 系统 (1) 在 J 上的能达域是 R^n ;

(ii) 当 $\sigma > 1$ 时, 系统 (1) 在 J 上有能达域

$$D_\sigma = \{x \mid \|x\| \leq \alpha^{-1}(T)[2^\sigma CTp(T)q(T)]^{\frac{1}{1-\sigma}}\};$$

(iii) 当 $\sigma = 1$ 时, 如果正数 C 和 T 满足

$$2CTp(T)q(T) \leq 1,$$

则 R^n 是系统 (1) 在 J 上的能达域.

证明 因为系统 (2) 完全能控, 所以 $Z(K) = R^n$, 因此, 根据定理 1 和引理 1, 为了证明 x_f 是系统 (1) 在 J 上的能达状态, 只须证明存在 $\eta \geq 0$ 使不等式 (6), (7) 同时成立.

当 $x_f = 0$ 时, 因 $f(0) = 0$, 故取 $\eta = 0$ 即可

当 $x_f \neq 0$ 时, 只须取

$$\eta = k\alpha(T) \|x_f\|, \quad k \geq 1 \quad (11)$$

则 (6) 式恒成立; 其次, 由条件 (10) 可得

$$m(2\eta) \leq (2\eta)^\sigma C \quad (12)$$

因此, 对情形 (i) 只要取

$$k = \max\{1, (\alpha(T) \|x_f\|)^{-1} (2^\sigma CTp(T)q(T))^{\frac{1}{1-\sigma}}\},$$

对情形 (ii) 和 (iii) 只要取 $k = 1$, 代入式 (11), 利用式 (12) 便可证得 (7) 式成立. 从而, 定理 3 得证.

参 考 文 献

- 1 周鸿兴, 赵怡. 非线性系统的能控性理论. 控制理论与应用, 1988, 5(2): 1~14
- 2 Nashed MZ. Generalized Inverses and Applications. New York, Academic Press. 1976. 397~

- 3 Lakshmikantham V, Leela S. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*. Oxford, 1981. 34~39
- 4 关肇直, 陈翰馥. 线性控制系统的能控性和能观测性. 北京: 科学出版社, 1975. 3~21

The Attainable Domain of Semilinear Systems

*Chen Yunfeng**

Abstract In this paper we discuss the attainable domain of a class of semilinear systems by using the theory for generalized inverses of the linear operators and Sadovskii fixed point theorem. Some attainability practical criterions and analytic expressions of the attainable domain are derived.

Keywords semilinear systems, attainable domain, generalized inverses

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275