

三参数强非线性系统的 周期振动与分叉*

黄赧彪 徐兆

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要 研究一类含三参数强非线性自激振动系统的周期振动随参数的变化而产生、分叉及消失过程以及稳定性特性. 给出系统的振幅与参数的近似关系式, 以及若干情形的振幅与参数曲线、参数的分叉值和周期解的相图.

关键词 三参数系统, 周期振动、分叉

分类号 TB123

工程技术中许多自激振动问题, 都可简化为形如

$$\ddot{x} + Ax - 2Bx^3 + \epsilon(\lambda_0 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4)\dot{x} = 0 \quad (1)$$

的三参数强非线性系统的研究. (1)中, $\epsilon > 0$ 是小参数, A, B 是实常数, λ_0, λ_2 和 λ_4 是实参数.

关于(1)的周期解及其分叉问题, 传统的研究方法有 Lyapunov 第二方法、Poincaré 法、Friedrich 法和后继函数法^[1]. 但这些方法不便于应用. 文[2]利用一阶近似的谐波平衡法和线性近似理论, 讨论了(1)中参数与奇点附近的相图关系, 并在一定意义上给出了若干特殊情形的相图. 文[3]更明了地给出了关于强非线性动力系统孤立周期解的存在性、唯一性和稳定性定理的研究方法. 本文利用此法, 给出(1)的自激参数 λ_0, λ_2 和 λ_4 与周期振幅的近似关系式, 并就 $A=8, B=1$ 及 $A=8, B=-1$, 分别分三种情形给出振幅与 λ_0, λ_2 和 λ_4 的近似关系曲线, 从而形象地显示周期解随参数的变化而产生, 稳定性、分叉及消失的全过程. 同时利用文[3]提出的近似方法, 推导了系统(1)的周期解的近似表达式. 并且对 6 种特殊情形的解析法与数值法进行比较. 结果表明, 文[3]的判别法十分有效, 近似法精度良好.

1 周期振动与分叉

在(1)中, 记 $Ax - 2Bx^3 = g(x)$, $-(\lambda_0 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4)\dot{x} = f(x, \dot{x})$. 令

收稿日期: 1993-03-27

* 国家自然科学基金资助项目

$$v(x) = \int_0^x g(t) dt = \frac{x^2}{2}(A - Bx^2), \quad \dot{x} = y,$$

则(1)可写为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax + 2Bx^3 - \varepsilon(\lambda_0 + \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4)y \quad (2)$$

当 $\varepsilon=0$ 时, (2)变为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -Ax + 2Bx^3 \quad (3)$$

可以证明, 系统(3)有形如

$$x_0 = a_0 \cos \tau, \quad y_0 = -a_0 \tau \sin \tau, \quad x_0 \in (\beta_2, \beta_1) \text{ 或 } x_0 \in (a_1, a_2) \quad (4)$$

其中, $a_i, \beta_i (i=1, 2)$ 的取值与式(3)中的 A, B 有关:

$$\text{i) 若 } A > 0, B > 0, \text{ 则 } a_1 = \beta_1 = 0, a_2 = \frac{A}{2B}, \beta_2 = -\frac{A}{2B}; \quad (5)$$

$$\text{ii) 若 } A > 0, B < 0, \text{ 则 } a_1 = \beta_1 = 0, a_2 = +\infty, \beta_2 = -\infty;$$

$$\text{iii) 若 } A < 0, B < 0, \text{ 则 } a_1 = \frac{A}{B}, \beta_1 = -\frac{A}{B}, a_2 = +\infty, \beta_2 = -\infty;$$

$$\text{iv) 若 } A < 0, B > 0, \text{ 则不存在实的 } a_i, \beta_i (i=1, 2), \text{ 即系统(3)无周期解.}$$

下面讨论系统(3)在干扰力 $-\varepsilon f(x, y)$ 作用下(即系统(2))的周期振动特性. 记

$$B(a_0) = -a_0 \int_0^{2\pi} f(x_0, y_0) \sin \tau d\tau \quad (6)$$

$$\Delta \lambda_0 a_0^2 S_0(a_0) + \lambda_2 a_0^2 S_2(a_0) + \lambda_4 a_0^2 S_4(a_0)$$

其中

$$S_0(a_0) = -\int_0^{2\pi} \tau \sin^2 \tau d\tau,$$

$$S_2(a_0) = -\int_0^{2\pi} \tau \sin^2 \tau \cos^2 \tau d\tau,$$

$$S_4(a_0) = -\int_0^{2\pi} \tau \sin^2 \tau \cos^4 \tau d\tau.$$

由文[3].

1) 系统(2)在(4)附近作周期振动的必要条件是 $B(a_0) = 0$ 即

$$\lambda_0 S_0(a_0) + \lambda_2 a_0^2 S_2(a_0) + \lambda_4 a_0^2 S_4(a_0) = 0 \quad (7)$$

2) 系统(2)在(4)附近作方式唯一且稳定(不稳定)的周期振动的充分条件是

$$B(a_0) = 0, \quad \frac{dB(a_0)}{da_0} < 0 \quad (> 0) \quad (8)$$

对于具体问题, 或按期望的振幅值, 由式(7)调整参数 λ_0, λ_2 和 λ_4 , 或按给定的参数值, 由(7)确定振幅, 凭借高速的电子计算机是容易实现的.

至于系统(2)的周期解的表达式, 依文[3], 一阶近似的振型和频率分别设为

$$x = (a_0 + \varepsilon a_1) \cos \tau, \quad \omega = \dot{\tau} = \omega_0(\tau) + \varepsilon \omega_1(\tau)$$

于是, 一阶近似的振幅和周期分别为

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\omega}$$

这里

$$\omega_0(\tau) = \sqrt{A - B a_0^2 (1 + \cos^2 \tau)}, \quad a_1 = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\omega_1(\tau) = Q_1(\tau) a_1 + Q_2(\tau).$$

而

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{a_0 \omega_0(\tau)} [A - 2B a_0^2 (1 + \cos^2 \tau)],$$

$$Q_2(\tau) = -\frac{1}{a_0 \omega_0(\tau) \sin^2 \tau} \int_0^\tau f(a_0 \cos \tau, -a_0 \omega_0(\tau) \sin \tau) \sin \tau d\tau,$$

$$p_1 = -a_0 \int_0^{2\pi} Q_2(\tau) f'_x \sin^2 \tau d\tau,$$

$$p_2 = \int_0^{2\pi} [(a_0 Q_1(\tau) + \omega_0(\tau)) f'_x \sin^2 \tau - f'_x \sin \tau \cos \tau] d\tau.$$

以上两式中,

$$f'_x = -(\lambda_0 + \lambda_2 a_0^2 \cos^2 \tau + \lambda_4 a_0^4 \cos^4 \tau),$$

$$f'_x = 2a_0^2 (\lambda_2 + 2\lambda_4 a_0^2 \cos^2 \tau) \omega_0(\tau) \sin \tau \cos \tau.$$

下面对 A, B 及 $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4$ 的若干特殊取值, 讨论系统(2)的周期振幅与各参数的关系.

① 设 $A > 0, B > 0$.

由式(5)得 $0 < a_0 \leq \sqrt{\frac{A}{2B}}$, 取 $A=8, B=1$ 得 $0 < a_0 \leq 2$

(i) 取 $\lambda_2=3, \lambda_4=-3$. 由式(7)得 a_0 与 λ_0 的关系

$$\lambda_0 = \frac{3a_0^2}{S_0(a_0)} [a_0^2 S_4(a_0) - S_2(a_0)]$$

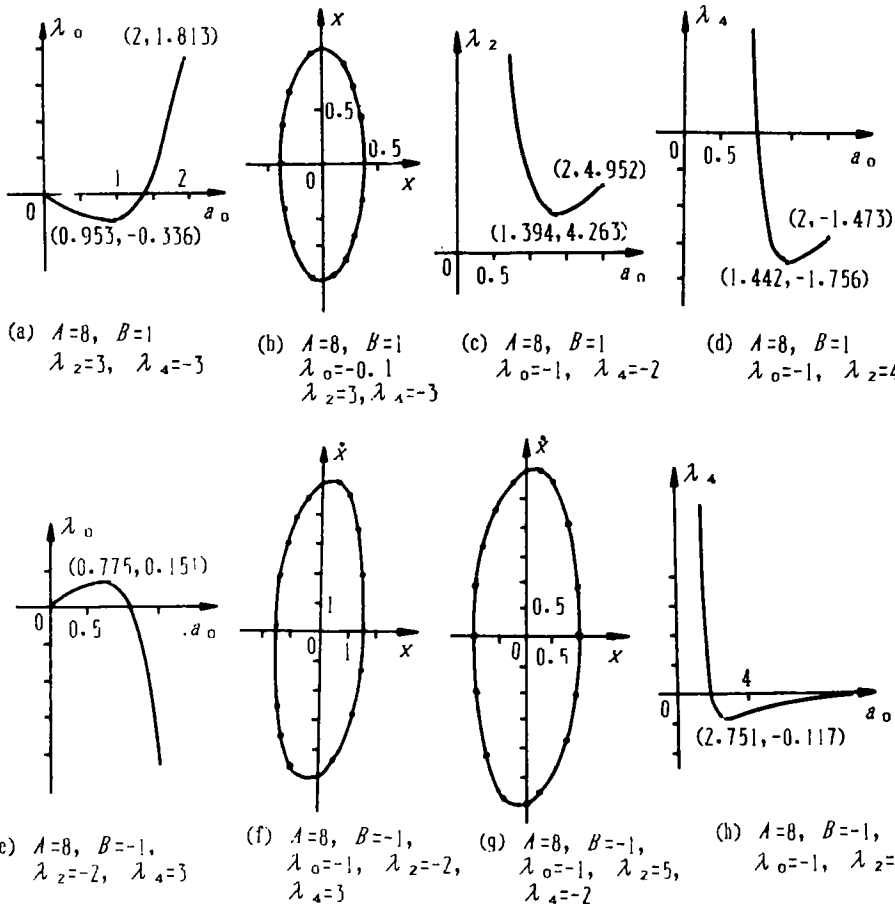


图 1 系统(1)的振幅-参数曲线及相图($\epsilon=0.5$)

Fig. 1 Amplitude-parameter curves and phase diagram of system(1)($\epsilon=0.5$)

$\lambda_0 - a_0$ 曲线如图 1(a). 计算结果表明, 当参数 λ_0 在 $(-0.33566, 1.81269)$ 内变化时, 系统 (2) 有周期解, 振幅位于 $(0, 2)$ 附近. 由式 (6), $\frac{dB(a_0)}{da_0}$ 在 $a_0 \in (0, 0.95261)$ 及 $a_0 \in (0.95261, 2)$ 内分别小于 0 和大于 0. 于是, (2) 的周期振动随 λ_0 的变化而出现、分叉、消失, 以及稳定性的过程如下: 当 $\lambda_0 > 1.81269$ 时, (2) 无周期解; 当 $\lambda_0 \in (0, 1.81269)$ 时有唯一但不稳定周期解, 振幅位于 $(1.36305, 2)$ 附近; 当 $\lambda_0 \in (-0.33566, 0)$ 时, (2) 有两个周期解, 振幅分别位于 $(0, 0.95261)$ 及 $(0.95261, 1.36305)$ 附近, 前者稳定, 后者不稳定; 当 $\lambda_0 < -0.33566$ 时, (2) 的周期解消失. 综上所述, λ_0 关于 (2) 的周期解有 3 个分叉值, 分别位于 $1.81269, 0$ 及 -0.33566 附近.

为了便于与数值法比较, 取 $\lambda_0 = -0.1 \in (-0.33566, 0)$, $\varepsilon = 0.5$ (下同). 由上述分析知, 此时 (2) 有两个周期解, 由式 (7) 得 $a_0^{(1)} = 0.38112$, $a_0^{(2)} = 1.31628$. 由式 (12) 和 (11) 算得 $a_1^{(1)} = 0.00014$, $a_1^{(2)} = -0.0127$, $a^{(1)} = 0.38098$, $a^{(2)} = 1.30501$, $T^{(1)} = 2.25513$. 前者稳定, 后者不稳定. 四阶龙格-库塔数值法算得的周期 $T^{(1)} = 2.23$. 图 1(b) 给出稳定解的相图. 图中, 实线是数值法, 实点是近似法 (下同). 数值积分法表明这一不稳定解最终收敛于振幅为 0.38112 附近的稳定解.

(ii) 取 $\lambda_0 = -1, \lambda_1 = -2$. 由 (7) 得 λ_2 与 a_0 的关系

$$\lambda_2 = \frac{1}{a_0^2 S_2(a_0)} [S_0(a_0) + 2a_0^4 S_4(a_0)]$$

$\lambda_2 - a_0$ 曲线由图 1(c) 可见, λ_2 和 a_0 的值域分别是 $(4.26310, +\infty)$, $(0, 2)$. 在 $a_0 \in (0, 1.39449)$ 及 $a_0 \in (1.39449, 2)$ 内, $\frac{dB(a_0)}{da_0}$ 分别小于 0 和大于 0. (2) 的周期振动随 λ_2 的变化而出现、分叉、消失, 以及稳定性的过程如下: $\lambda_2 \in (4.95210, +\infty)$ 时, (2) 有唯一且稳定周期解, 振幅相应地位于 $(0, 1.05)$ 附近; $\lambda_2 \in (4.26310, 4.95210)$ 时, (2) 的周期解分叉为两个, 振幅分别位于 $(1.05, 1.39449)$ 和 $(1.39449, 2)$ 附近, 其中, 前者稳定, 后者不稳定; 当 $\lambda_2 < 4.26310$ 时, (2) 的周期解消失. 可见, λ_2 有两个分叉值, 分别在 4.95210 及 4.26310 附近.

取 $\lambda_2 = 4.5$, 此时系统 (2) 有两个周期解. 振幅分别为 1.17350 及 1.61105 . 前者稳定, 后者不稳. 数值积分法表明, 以 1.61105 为初值所描出的轨线最终收敛于以 1.17350 为振幅的稳定解.

(iii) 取 $\lambda_0 = -1, \lambda_2 = 4$. 由式 (7) 得 λ_4 与 a_0 的关系

$$\lambda_4 = \frac{1}{a_0^4 S_4(a_0)} [S_0(a_0) - 4a_0^2 S_2(a_0)]$$

$\lambda_4 - a_0$ 曲线如图 1(d). 类似于上述, λ_4 的变化范围是 $(-1.75584, +\infty)$. 相应地, 振幅的值域在 $(0, 2)$ 附近. 在 $a_0 \in (0, 1.442)$ 及 $a_0 \in (1.442, 2)$ 内, $\frac{dB(a_0)}{da_0}$ 分别小于 0 和大于 0. $\lambda_4 \in (-1.47331, +\infty)$ 时, (2) 有唯一且稳定周期解; $\lambda_4 \in (-1.75584, -1.47331)$ 时, (2) 的周期解分叉为两个, 振幅分别位于 $(1.205, 1.442)$ 及 $(1.442, 2)$ 附近, 其中, 前者稳定, 后者不稳定; $\lambda_4 < -1.75584$ 时, (2) 的周期解消失. λ_4 有两个分叉值 -1.47331 及 -1.75584 .

取 $\lambda_4 = 3 \in (-1.47331, +\infty)$, 系统 (2) 有唯一且稳定周期解. 近似法算得振幅为 $a =$

0.88261, 周期 $T=2.34727$. 数值法算得的周期为 $T=2.37$. 又如取 $\lambda_4 = -1.6 \in (-1.75584, -1.47331)$, 系统(2)有两个周期解, 振幅分别约为 1.27030 和 1.68013. 前者稳定, 后者不稳定. 数值积分法表明不稳定的解迅速收敛于振幅较小的稳定解.

②设 $A>0, B<0$.

(iv) 取 $A=8, B=-1, \lambda_2=-2, \lambda_4=3$, 由式(7)得

$$\lambda_0 = \frac{a_0^2}{S_0(a_0)} [2S_2(a_0) - 3a_0^4 S_4(a_0)]$$

$\lambda_0 - a_0$ 曲线如图 1(e). 使(2)产生周期振动的 λ_0 的值为 $(-\infty, 0.15145)$. 相应地, 振幅在 $(0, +\infty)$ 上. 由式(6), $a_0 \in (0, 0.77488)$ 及 $a_0 \in (0.77488, +\infty)$ 内, $\frac{dB(a_0)}{da_0}$ 分别大于 0 和小于 0, 于是, 在 $\lambda_0 \in (-\infty, 0)$ 内, (2)有唯一且稳定周期解, 振幅位于 $(1.09231, +\infty)$ 内; $\lambda_0 \in (0, 0.15145)$ 时, (2)分叉出两个周期解, 振幅在 $(0, 0.77488)$ 内者稳定, 振幅在 $(0.77488, 1.09231)$ 内者不稳定; $\lambda_0 > 0.15145$ 时, (2)的周期解消失. λ_0 的两个分叉值分别约为 0 和 0.15145.

取 $\lambda_0 = 0.1 \in (0, 0.15145)$, 系统(2)有两个周期解, 振幅分别约为 0.50159 和 0.96558. 前者不稳定, 后者稳定. 数值积分表明, 振幅较小的不稳定解最终收敛于振幅约为 0.96558 的稳定解. 图 1(f)是 $\lambda_0 = -1$ 时系统(2)的相轨, 近似法算得的振幅为 1.56633. 数值法和近似法都表明此解是稳定的.

(v) 取 $A=8, B=-1, \lambda_0=-1, \lambda_4=-2$. 由(7)式得

$$\lambda_2 = \frac{1}{a_0^2 S_2(a_0)} [S_0(a_0) + 2a_0^4 S_4(a_0)]$$

当 $\lambda_2 < 4.17862$ 时, (2)无周期解; 当 $4.17862 < \lambda_2 < +\infty$ 时, (2)有两个周期解, 振幅分别位于 $(0, 1.36822)$ 和 $(1.36822, +\infty)$. 前者稳定, 后者不稳定. 令 $\lambda_2 = 5$, 近似法算得两个周期解的振幅分别约为 1.00832 和 1.81730. 前者稳定, 后者不稳定. 图 1(g)给出了稳定解的相轨. 数值积分法表明, 不稳定的解收敛于相应稳定解.

(vi) 取 $A=8, B=-1, \lambda_0=-1, \lambda_2=1$. 由式(7)得

$$\lambda_4 = \frac{1}{a_0^4 S_4(a_0)} [S_0(a_0) - a_0^2 S_2(a_0)]$$

$\lambda_4 - a_0$ 曲线如图 1(h). 当 $0 < \lambda_4 < +\infty$ 时, 系统(2)有唯一且稳定周期解, 相应的振幅位于 $(0, 1.95613)$, 且当 $\lambda_4 \rightarrow +\infty$ 时振幅 $a \rightarrow 0$; 当 $\lambda_4 \in (-0.11672, 0)$ 时, (2)有两个稳定周期解; 当 $\lambda_4 \in (-\infty, -0.11672)$ 时, (2)的周期解消失. λ_4 的分叉值为 -0.11672 和 0. 取 $\lambda_4 = 1 \in (0, +\infty)$, (2)有唯一且稳定的周期解. 近似法算得振幅为 1.39692. 周期为 $T=1.82$.

3 结 语

上述分析显示, 文[3]关于强非线性振动系统周期解有关特性的结论很有效, 近似解的精度甚高, 对四阶非线性, 小参数 $\epsilon=0.5$ 时, 与数值法的结果仍吻合良好.

顺便指出, 文[2]利用谐波平衡法, 在一定意义上讨论了系统(2)的力学特性. 但该文

通过引进比例参数 $\frac{A}{B}$ 来叙述全文的主要结果, 意义是不确定的. 因为对同一比值 $k = \frac{A}{B}$, 当 $A < 0, B > 0$ 时系统(2)无周期解, 而 $A > 0, B < 0$ 时则有周期解. 比如该文中图 5 显示的结果是 $A/B = -6.89$ 的情况, 当 $A = 6.89, B = -1$ 时系统(2)有周期解, 但 $A = -6.89, B = 1$ 时则(2)无周期解. 这是文[3]的结果和数值法所共同证实的.

参 考 文 献

- 1 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1981
- 2 Margallo, J G^a, Bejarano J D. Stability of Limit Cycles and Bifurcations of Generalized Van Der Pol Oscillators Int. J. Non-Linear Mechanics. 1990, 25(6): 663~675
- 3 徐兆, 黄赅彪. 非线性振子极限环的实用分析法. 力学与实践, 1988, 5: 6~10

The Periodic Vibrations and Bifurcations of a strongly Nonlinear System with Three Parameters

Huang Chengbiao Xu Zhao*

Abstract The processes of the generating, bifurcating and vanishing and the characteristics of the stability of the periodic vibrations follow in the variation of the parameters for the strongly nonlinear autonomous vibration system with three parameters are studied. And the approximate relationship between the amplitude and the parameters as well as the curves of the amplitude—parameters, the bifurcations of the parameters, and the phase diagrams are given.

Keywords three parameters system, periodic vibration, bifurcation

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275