第34卷 第1期
1995年1月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 1
Jan. 1995

理想介观环AC型持续流

周义昌 朱诗亮* 曾柱石
(中山大学物理学系,广州 510275) (广东教育学院)

摘 要 本文导出了电子在电磁场中合AC效应的哈密顿量,结果比Aharonov—Casher的中子哈密顿多了1/2因子.应用到同时存在AB,AC效应的介观环中,精确求出了能谱,持续电流,自旋流的解析表达式.讨论了$T=0$K时AC效应诱发的持续流,在强电场下,AC效应有极重要影响.

关键词 介观环,AC效应,持续流
分类号 O412.3

介观环被磁通Φ穿过而诱发以$\Phi_0=hc/e$为基本周期的持续电流,已被三个实验证实[1].这种持续电流,实质上是Aharonov—Bohm效应在量子力学定态的表现,因而被称为AB型持续电流.Aharonov和Casher提出,电中性但带磁矩的粒子(例如中子)在电场中运动时也产生类似AB效应的拓扑相位因子[2],他们的预言尽管效应较弱,但也被实验证实[3],电子的AC效应对介观环持续电流的影响已引起人们研究兴趣[4,5].

文献〔5〕在计算中作了近似,只考虑了电场径向分量E_r的效果,没有讨论近似的准确程度.本文精确讨论了含AC效应的介观环的解析解.结果表明,若电场$E\sim10^7$V/m,径向电场远比轴向电场贡献大,文献〔5〕的结果是可靠的.但当电场$E\sim10^{10}$V/m时,则轴向电场贡献远比径向电场大.此时文献〔5〕的结论需作修正.

1 含A-C效应的电子哈密顿量

考虑电子($-e$)在矢势$\vec{A}$和标势A_0中运动.相对论性电子狄拉克方程是

$$[c\vec{\alpha}\cdot(\vec{p}+(e/c)\vec{A})+\beta mc^2-eA_0]\psi(\vec{X})=E\psi(\vec{X}) \tag{1}$$

令波函数

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

其中ψ_1是正能的大分量,ψ_2是负能的小分量.并设$E=\varepsilon+mc^2$,经过不复杂的运算,可得到

收稿日期:1993—12—03
* 1992级硕士研究生

正能大分量 ψ_1 满足

$$\hat{h}\psi_1 = \varepsilon\psi_1 \tag{2}$$

其中

$$\hat{h} = \vec{\sigma}[\vec{p} + (e/c)\vec{A}][c^2/(E + eA_0 + 2mc^2)]\vec{\sigma}\cdot[\vec{p} + (e/c)\vec{A}] - eA_0 \tag{3}$$

由(3)式经过非相对论近似，可得到

$$\hat{h}(1/2m)[\vec{p} + (e/c)\vec{A}]^2 - (he/4\pi mc)\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + (1/2c)\vec{\mu}\cdot(\vec{V}\times\vec{E}) - eA_0 \tag{4}$$

这里静磁场 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ 及静电场 $\vec{E} = -\nabla A$.(3)式第一项为电子动能，第二项为 Zeeman 磁矩一磁场耦合能，第三项即 AC 效应.

(4)式近似写为

$$\hat{h} = (1/2m)[\vec{p} + (e/c)\vec{A} - \frac{1}{2c}\vec{\mu}\times\vec{E}]^2 + \vec{\mu}\cdot\vec{B} - eA_0 \tag{5}$$

电子的 AC 效应项与中子情况比较，多出因子 1/2，源于电子受到电场的加速，产生 Thomas 进动.

2 哈密顿量的精确对角化

我们不考虑 Zeeman 项，同时(5)式中的 eA_0 是常数项，可以吸收到电子的化学势 μ_0 中，则一维环的单电子哈密顿为

$$\hat{h} = (1/2m)[\vec{p} + (e/c)\vec{A} + (\mu_B/2C)\vec{\sigma}\times\vec{E}]^2 \tag{6}$$

N 电子的哈密顿

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\hat{h} - \mu_0\hat{N} \tag{7}$$

对于半径为 R 的精确一维圆环，矢势 $A_\theta = \theta/2\pi R$；只考虑 $\vec{e}_\theta$ 方向的运动，$P_\theta = -(ih/2\pi R)(\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta)$，$\vec{\sigma}\times\vec{E}$ 只取 $\vec{e}_\theta$ 分量 $\vec{\sigma}_Z E_r - \vec{\sigma}_r E_z$，得到

$$\hat{h} = hw/2\pi[-id/d\theta + \varphi/\varphi_0 + \hat{\sigma}_Z\varphi_{AC} - \varphi_Z(\hat{\sigma}_x\cos\theta + \hat{\sigma}_y\sin\theta)]^2 \tag{8}$$

这里记 $w = h/4\pi mR^2$，$\varphi_0 = ch/e$，$\varphi_{AC} = \pi\mu_B E_r R/ch$，$\varphi_Z = \pi\mu_B E_z R/ch$，以后用到 $w_1 = w\varphi_z$.

下面用二次量子化方法来求出 N 电子的哈密顿量，取表示的基

$$hw/2\pi(-i\partial/\partial\theta + \varphi/\varphi_0)^2\psi_n(\theta) = \in_n\psi_n(\theta) \tag{9}$$

这里 $\psi_n(\theta) = (1/\sqrt{2\pi})e^{in\theta}$，$\hat{\sigma}_Z\chi_\sigma = \sigma\chi_\sigma$，$\in_n = (hw/2\pi)(n + \varphi/\psi_0)^2$，$\chi_\sigma$ 是自旋波函数. 算符

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{(\theta)} = \sum_{n\sigma}\psi_n(\theta)\chi_\sigma C_{n\sigma} \\ \hat{\psi}^{+}_{(\theta)} = \sum_{n\sigma}\psi^*_{n(\theta)}\chi^{+}_\sigma C^{+}_{n\sigma} \end{cases}$$

这样，哈密顿(8)式简化成

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int\psi^{+}_{(\theta)}\hat{h}\psi(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n\sigma}[\varepsilon_{n\sigma}C^{+}_{n\sigma}C_{n\sigma} + \triangle_n(C^{+}_{n\uparrow}C_{n-1,\downarrow} + C^{+}_{n-1,\downarrow}C_{n\uparrow})] \end{aligned} \tag{10}$$

其中
$$\in_{n\sigma}=(hw/2\pi)(n+\varphi/\varphi_0+\sigma\varphi_{AC})^2+hw\varphi_Z^2/2\pi-\mu_0$$
$$\triangle_n=-(hw_1/\pi)(n+1/2+\varphi/\psi_0) \tag{11}$$
$\hat{H}$ 中的第二项给出了环中运动电子自旋的改变,从中看出轨道状态的改变$\triangle_n=\pm1$ 和自旋方向的改变是同时的,只要轴向电场 $E_z\neq0$,介观环中的电子自旋方向总有一定的几率改变.

作实系数波戈留波夫变换,哈密顿(10)式可精确对角化成
$$\hat{H}=\sum_n(A_n\alpha_n^+\alpha n+B_n\beta_n^+\beta n) \tag{12}$$
$$A_n=(\in_n+\in_{n+1-})/2+\sqrt{g_n^2+\Delta_n^2} \tag{13}$$
这里的 $g_n=(\varepsilon_{n-1}-\in_{n+})/2$,代表了环中电子能级的分立值.

从能谱 A_n,B_n 的形式看,它们总是宗量 $n+\varphi/\psi_0$ 的函数,因此,能量或热力学函数是 φ 以 φ_0 为周期的周期函数.但是,我们首次指出,当轴向电场 $E_z\neq0$ 时,能谱及热力学量都不是 φ_{AC},以及 φ_Z 的周期函数.当 $E_Z=0$ 时,能谱及热力学量都变为 φ_{AC}的周期性函数.

从我们的结果,很容易看出 $\varphi_Z=0$ 时,
$$E_n=E_n(\varphi_{AB}+\sigma\varphi_{AC}) \tag{14}$$
同文献[5]完全一致.我们这里是严格求出了能谱的解析式,同时还可以指出,当 $\varphi_Z\neq0$ 时,因为 $\Delta_n\neq\Delta_n(\varphi_{AB}+\sigma\varphi_{AC})$,导致了(14)式不成立,这样,便确定了文献[5]的适应范围.

从(12)式可以看出,环中电子激发的准粒子分为两支,这跟环中 $\vec{E}=0$,而 $\vec{B}\neq0$ 且非均匀时的自旋一轨道相互作用给出的能谱极相似[6].实际上,这种相似不是表面上的,理应可以更统一地描述,我们以后再详细讨论.

3　持续电流

利用对角化了的哈密顿(12)式,可以直接写出自由能
$$F=-(1/\beta)\sum_n\{\ln[1+\exp(-\beta A_n)]+\ln[1+\exp(-\beta Bn)]\} \tag{15}$$
持续电流与自由能的关系是[2]
$$I(\varphi)=-C\ \partial F/\partial\varphi \tag{16}$$
所以
$$I(\varphi)=-C\sum_n\left[\frac{\partial A_n/\partial\varphi}{\exp(\beta A_n)+1}+\frac{\partial Bn/\partial\varphi}{\exp(\beta Bn)+1}\right] \tag{17}$$
由(13)式求出
$$\begin{cases}\partial An/\partial\varphi=(hw/\pi\varphi_0)(n+1+\varphi/\varphi_0)+(hw/2\pi\varphi_z)[(1-2\varphi_{AC})\sqrt{1+x^2}-1]\\ \partial Bn/\partial\varphi=(hw/\pi\varphi_0)(n+\varphi/\varphi_0)-(hw/2\pi\varphi_0)[(1-2\varphi_{AC})\sqrt{1+x^2}-1]\end{cases} \tag{18}$$
这里 $x=\Delta n/gn=-2\varphi_z/(1-2\varphi_{AC})$.由(17)、(18)式联合,可以确定温度 T 时,介观环中由 AB,AC 效应联合产生的持续电流.

当温度 $T=0$ 时,
$$I(\varphi)=-c\partial E/\partial\varphi=-C\sum_n(\partial A_n/\partial\varphi+\partial B_n/\partial\varphi) \tag{19}$$
求和局限于费米能 μ_0 之下的能级.为简单,我们以后的讨论局限于 $T=0K$ 情况,所得的

主要结论一般在极低温下都适应. 下面把AB效应,AC效应诱发的持续电流分离并加以讨论.

当 $\varphi_{AC}=\varphi_z=0,\varphi\neq 0$ 时,是纯 $A-B$ 效应. 此时,易得到 $A_n=\in_{n+1-},B_n=\in_{n+}$,故以后求和时 A_n 的动量对应于 $\pm(n+1)$,而 B_n 对应于 $\pm n$. 在 $-1/2\leqslant\varphi/\psi_0\leqslant 1/2$ 情况下,电子的填充顺序是:$\cdots>(An=B_{n+1})>(A_{n-1}=B_n)>\cdots$. 利用这种能级顺序,可以求出持续电流

$$I(\varphi)=\begin{cases}-I_0(\varphi/\varphi_0-1/4) & N_e\text{ 是奇数}\\ -I_0\varphi/\varphi_0 & Ne\text{ 是偶数}\end{cases}\tag{20}$$

这里 $I_0=Nehwc/2\pi\varphi_0$,这种情况被许多作者讨论过,上式与如考虑自旋时文献〔7〕式2—4的持续电流完全一致.

当 $\varphi_Z=0$,但是 φ_{AC},φ 有限时,仍有 $A_n=\in_{n+1-},B_n=\in_{n+}$,表明能谱 A_n 代表自旋 $\sigma_z=+1$ 状态,而 B_n 表征 $\sigma_Z=-1$ 自旋态,电场的作用是使自旋简并度解除. 当 φ_z 逐渐增加时,能谱 A_n 中从纯态 $\sigma_Z=+1$ 逐渐混有 $\sigma_z=-1$ 的状态,而 B_n 从 $\sigma_Z=-1$ 的纯态,慢慢混有 $\sigma_Z=+1$ 的状态.

当轴向,径向电场同时并存时,很容易证明(18)式 $\partial An/\partial\psi,\partial Bn/\partial\varphi$ 的前一项求和代表的是自由电子在纯A-B磁通诱发的持续电流(20)式,而后一项代表的是A-C电场诱发的持续流. 这样,零温时AB,AC型持续电流可以分离. 当有限温度时,两种效应混杂在一起. 这样,AC效应诱发的持续电流可表为

$$\begin{cases}I_{AC}=-C\sum\limits_n(\partial A'_n/\partial\varphi+\partial B'_n/\partial\varphi)\\ \partial A'_n/\partial\varphi=-\partial B'_n/\partial\varphi=(hw/2\pi\varphi_0)〔(1-2\varphi_{AC})\sqrt{1+x^2}-1〕\end{cases}\tag{21}$$

在费米面 F 求和,给出由AC效应诱发的持续电流

$$I_{AC}=(N_{Bn}-N_{An})(hw/2\pi\varphi_0)〔(1-2\varphi_{AC})\sqrt{1+x^2}-1〕\tag{22}$$

N_{An},N_{Bn} 分别表示占据能谱 A_n,B_n 中的电子数. 前面已指出,An,Bn 分别近似是自旋向下,向上的状态,即 $N_{Bn}-N_{An}\approx n_\uparrow-n_\downarrow$,所以,AC型电流 I_{AC} 正比 $n_\uparrow-n_\downarrow$.

现有实验中,电场强度 $E\sim 10^7\mathrm{V/m}$,介观环 $R\sim 10^{-5}\mathrm{m}$,则 $\varphi_{AC},\varphi_E,\chi\approx 10^{-3}$,则 $\sqrt{1+x^2}\approx 1+x^2/2$,这样,(22)式展开成

$$I_{AC}\approx(N_{Bn}-N_{An})(hw/2\pi\varphi_0)(-2\varphi_{AC}+x^2/2)\tag{23}$$

由上式看出,当电场较小时,I_{AC} 随 φ_{AC} 线性变化,而随 φ_E 二次方变化. φ_Z 的贡献远比 φ_{AC} 小. 如果实验可达 $E\sim 10^{10}m$ 时,φ_z,φ_{AC} 可达到1,φ_Z 的作用将比 φ_{AC} 大. 另外,比较细致的讨论可证明,$N_{Bn}-N_{An}$ 将随 φ_Z,φ_{AC} 上升而跳跃式增加,致使 I_{AC} 也随电场上升而跳跃式上升. 因此,要使AC效应在金属环持续电流中有明显影响,需要电场足够强,同时具有自旋极化的系统.

4 持续自旋流

介观环中持续自旋流可表示成[5]

$$j_\varphi^{\sigma z}=-(c/2\pi R)\partial E/\partial\varphi_{AC}\qquad(T=0)\tag{24}$$

在温度为 T 时,

$$j_{\text{ie}}^{\sigma Z}=-(c/2\pi R)\sum_{n}\left(\frac{\partial An/\partial\varphi_{AC}}{\exp(\beta An)+1}+\frac{\partial Bn/\partial\varphi_{AC}}{\exp(\beta B_n)+1}\right) \tag{25}$$

由式(13)可求出

$$\begin{cases}\partial An/\partial\varphi_{AC}=(h\omega/2\pi)(2\varphi_{AC}-1)-(h\omega/\pi\sqrt{1+x^2})(n+1/2+\varphi/\varphi_0)\\ \partial Bn/\partial\varphi_{AC}=(h\omega/2\pi)(2\varphi_{AC}-1)+(h\omega/\pi\sqrt{1+x^2})(n+1/2+\varphi/\varphi_0)\end{cases} \tag{26}$$

对 $T=0$ 时,类似于前面求持续电流的过程,得到持续自旋流

$$j_{\varphi}^{\sigma z}=-(c/2\pi R)[N_e(hw/\pi)\varphi_{AC}+j_{\varphi}^{1}] \tag{27}$$

其中

$$j'_{\sigma}=\begin{cases}(N_e hw/2\pi)(1/\sqrt{1+x^2}-1) & Ne\text{ 是偶数}\\ (Ne\ hw/2\pi)(2/\sqrt{1+x^2}-1) & Ne\text{ 是奇数}\end{cases}$$

j_{φ}^{1} 是 $\varphi_{AC}=0$ 时的自旋流,$X=0$ 时跟纯 AB 效应中的自旋流一致. 所有粒子由 φ_{AC}诱发的自旋流方向一致. 因此,AC 效应可以在介观环中产生极强的自旋流. 当 $x\ll1$ 时,可写出纯电场产生的 AC 型自旋流

$$j_{AC}^{\sigma Z}=\begin{cases}-(N_e hcw/2\pi^2R)(\varphi_{AC}+\chi^2/2) & \text{奇数 } N_e\\ -(N_e\ hcw/2\pi^2R)(\varphi_{AC}+\chi^2/4) & \text{偶数 } N_e\end{cases} \tag{28}$$

从以上讨论可知,AB 效应易诱发持续电流,而 AC 效应易产生自旋流.

5　结论和展望

对于金属介观环,在现有电场 $E\sim10^7$V/m 下,AC 效应引起的 $\varphi_{AC}\sim10^{-3}$,是一个极其小的效应. 但是如有轴向电场 Ez,这电场不仅比 Er 易实现,而且,前面得到的结果表明,持续电流 I_{AC}在弱场中正比于 φ_{AC},而与 E_z 的关系是 $I_{AC}\propto\varphi_Z^2$,故当电场增加时,φ_Z 的作用越来越重要. 当 $E\sim10^{10}$V/m 时,φ_{AC},$\varphi_Z\sim1$,AC 效应在介观环中的作用必不可少.

在金属中,需要强电场 AC 效应才明显. 有作者[5]指出,在半导体中,$\mu=g^*\mu B$,$g^*\sim10^2$,更弱的电场即可产生明显效应. 他们还认为,在 Ⅲ－V 族半导体,如 GaAs 中,可能晶体内部的极化场即可使 φ_{AC}达到 1 的数量级,在达到 $\varphi_{AC}\sim1$ 的区域,我们的讨论结果很重要.

由前面的讨论,我们得到:能谱、持续流及其它热力学量永远是 φ 以 φ_0 为周期的周期函数. 当 $\varphi_Z=0$ 时,它们同时还是 φ_{AC}以 1 为周期的周期函数,但不是 φ_Z 的周期函数;当 $\varphi_Z\neq0$ 时,能谱及热力学量也不是 φ_{AC}的周期函数.

AC 效应在介观环持续电流中影响远比 AB 效应小,原因一是不容易产生很强的电场,另一点是 AC 效应产生的持续电流方向与自旋方向有关,自旋相反的粒子产生的电流互相抵消,而 AB 效应产生的持续电流方向一致. 对自旋流正好相反,AB 效应不易诱发,而 AC 效应可诱发较强的自旋流.

从我们得到的精确解可以知道,提高 AC 效应的实验方法有:寻找如文献[4]指出的类似于^{3}He－A_1 相中存在($n_\uparrow$,－$n_\downarrow$)自旋极化较大的系统或文献[6]指出的存在极化晶体场的物质. 而更根本的方法是提高电场强度.

参考文献

1 Mailly D, chapetier C, Benoit A. Experimental observation of persistent current in a GaAs—AlGaAs single loop. Phys Rev Lett, 1993, 70:2020

2 Aharonov Y, Casher A. Topological quantum effects for neutral particles. Phys Rev lett, 1984, 53:319

3 Cimmino A, Opart G. Observation of the topological Aharonov—Casher Phase shift by neutron interferometry, phys Rev Lett, 1989, 63:380

4 Balatshkg A, Altshuler B. persistent spin and mass currents and Aharonov—Casher effect. phys Rev Lett, 1993, 70:1678

5 Harsh M, Stone A. Quantum transport and electronic Aharonov—Casher effect. Phys Rev Lett, 1992, 68:2964

6 Loss D, Goldbart P, Balastsky A. Berry's phase and persistent charge and spin currents in texture mesoscopic ring. Phys Rev Lett, 1990, 65:1655

7 Cheung H, Gefen Y. Persistent current in small one—dimensional metal rings. Phys Rev, 1988, B37:6050

Aharonov—Casher Type Persistent Currents in Mesoscopic Ring

Zhou Yichang * *Zhu Shiliang* *Zeng Zhushi*

Abstract An effective Hamiltonian describing AC effect for electrons in electromagnetic field is derired and a factor of 1/2 over Anaronov—Casher Hamiltonian is obtained. Based on an exact second guantized Hamiltonian of non—interacting electron gas in the mesoscopic ring mixed with AB, AC effect, analytic solutions for energy eigenvalues, the persistent current and persistent spin curreut are obtained It is shown that AC effect is extremely important for electrons in some semiconductors applied with intense electric field.

Keywords mesoscopic ring, AC effect, persistent current

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275