

计算 Sommerfeld 型积分远场近似的新方法

龙云亮 林貽堃

(中山大学无线电电子学系, 广州 510275)

摘要 介绍一种计算 Sommerfeld 型积分的远场近似的新方法, 并给出其误差分析. 采用该方法, 结合复镜像理论, 可快速方便得出 3 层导电媒质中环天线远区场强的解析表达式.

关键词 Sommerfeld 型积分, 分层导电媒质, 复镜像理论, 环天线

分类号 TN011.5, O174.5

电磁场在半空间或分层媒质中的辐射问题, 在实际工程中是经常遇到的. 如近地天线的辐射与散射, 水下通讯, 微带天线的计算, 频率选择表面的 RCS (雷达散射截面) 的计算等^[1~3]. 这类问题的形式解中常常包含有 Sommerfeld 型积分^[4]. 在近场区, 上述积分可以通过数值积分得出. 在远场区, 由于用数值积分收敛很慢, 一般采用鞍点法 (最速下降法), 但该方法推导繁杂, 使用起来显得冗长^[3]. 最近 Chew 提出一种相当简捷的计算 Sommerfeld 型积分的远场近似的方法^[5], 但没有给出误差分析. 本文给出 Chew 方法的严格误差分析, 从理论上证明了该方法的正确性. 作为一个实例, 采用上述方法, 结合复镜像理论, 快速方便地得出 3 层导电媒质中环天线远区辐射场强的解析表达式, 与用其它方法得到的结果完全一致. 该方法可以很方便地推广应用到类似情况的远区场强的计算中去.

1 方法及误差分析

一般 Sommerfeld 型积分具有形式

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(\alpha, \lambda) d\alpha \quad (1)$$

此积分有有限值, $f(\alpha)$, $g(\alpha, \lambda)$ 均为复 α 平面上的复变函数. 当 λ 很大时, $f(\alpha)$ 为慢变函数, $g(\alpha, \lambda)$ 为快变函数, 振荡非常快, 此时可认为

$$g(\alpha, \lambda) \sim e^{j\lambda\phi(\alpha)}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (2)$$

求出驻相点 α_0 , 满足

收稿日期: 1993-11-19

$$\frac{\partial s(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \quad (3)$$

如在 α_0 附近 $f(\alpha)$ 不存在奇异性, 由于 $f(\alpha)$ 的慢变性, 可以认为

$$I \simeq f(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha, \lambda) d\alpha, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (4)$$

适当选择 $g(\alpha, \lambda)$ 的形式, 使上式中的积分有闭合形式, 则可得式 (1) 的近似闭合表达式. 这就是 Chew^[5] 提出的方法.

该方法的误差为

$$I_e = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\alpha) - f(\alpha_0)] g(\alpha, \lambda) d\alpha, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (5)$$

Chew 认为 I_e 相对于 I 应该很小, 因为在式 (5) 积分的主要贡献处 ($\alpha = \alpha_0$) 慢变函数部份 $[f(\alpha) - f(\alpha_0)]$ 为零, 从直观上看式 (4) 成立. 下面我们给出严格的误差分析.

设 $g(\alpha, \lambda)$ 取式 (2) 的形式, 有

$$I_e = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\alpha) - f(\alpha_0)] e^{j\lambda s(\alpha)} d\alpha, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (6)$$

将 $f(\alpha)$ 在 α_0 附近做 Taylor 展开

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + f'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{f''(\alpha_0)}{2!}(\alpha - \alpha_0)^2 + \dots \quad (7)$$

取一阶近似(从后面的证明可以看出, 这已足够了), 有

$$I_e \simeq f'(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \alpha_0) e^{j\lambda s(\alpha)} d\alpha, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (8)$$

将 $s(\alpha)$ 在 α_0 附近同样做 Taylor 展开, 并注意到式 (3), 有

$$s(\alpha) = s(\alpha_0) + \frac{s''(\alpha_0)}{2!}(\alpha - \alpha_0)^2 + \frac{s'''(\alpha_0)}{3!}(\alpha - \alpha_0)^3 + \dots \quad (9)$$

$$\text{设 } \tau = s(\alpha_0) - s(\alpha) = -(\alpha - \alpha_0)^2 \left[\frac{s''(\alpha_0)}{2!} + \frac{s'''(\alpha_0)}{3!}(\alpha - \alpha_0) + \dots \right] \quad (10)$$

从上式可解得

$$\alpha - \alpha_0 = \pm j\tau^{1/2} [c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \dots]^{-1/2} \quad (11)$$

其中 $\beta = \alpha - \alpha_0$, $c_0 = s''(\alpha_0)/2!$, $c_1 = s'''(\alpha_0)/3!$, \dots . 利用 Lagrange 展开式^[6], 可解得

$$\alpha - \alpha_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm j)^n}{n!} a_n \tau^{n/2} \quad (12)$$

$$\text{从而有 } d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm j)^n}{2(n-1)!} a_n \tau^{n/2-1} d\tau \quad (13)$$

其中 $a_n = \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}} [c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \dots]^{-n/2} \Big|_{\beta=0}$. 将式 (12)、(13) 代入式 (8), 注意到 $s(\alpha) = s(\alpha_0) - \tau$ 并合适选择最速下降路径, 有

$$\begin{aligned} I_e &\simeq f'(\alpha_0) e^{j\lambda s(\alpha_0)} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \alpha_0) e^{-j\lambda\tau} d\alpha \\ &= f'(\alpha_0) e^{j\lambda s(\alpha_0)} \int_0^{\infty} e^{-j\lambda\tau} \left[2j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} a_{2m+1} \tau^{m+\frac{1}{2}} \right] \left[j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} a_{2m+1} \tau^{m-\frac{1}{2}} \right] d\tau \end{aligned}$$

$$= -2f'(\alpha_0)e^{j\lambda(\alpha_0)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} e^{-j\lambda r} \tau^n d\tau$$

由 $\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{n-1} dt = \Gamma(n) = (n-1)!$, 有

$$I_z = -2f'(\alpha_0)e^{j\lambda(\alpha_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^{n+1} b_n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \quad (14)$$

其中 $b_0 = a_1^2$, $b_1 = -\frac{2}{3}a_1a_3, \dots$. 因 $f(\alpha)$ 为慢变函数, 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{I_z}{I} \right| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{2f'(\alpha_0)e^{j\lambda(\alpha_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^{n+1} b_n \frac{n!}{\lambda^{n+1}}}{f(\alpha_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda(\alpha)} d\alpha} \right| \propto \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (15)$$

这样, 我们证明了式(4)确实是式(1)的远区近似.

2 三层导电媒质中环天线的远区电磁场

作为应用上节讨论方法的例子, 我们求解 3 层导电媒质中环天线的远区辐射场强的解析表达式. 如图 1 所示, 一环天线水平地放置在海水中, 距海平面为 d_1 , 其环中电流为 I , 环面积为 S , P 为场点, 距海面为 d_2 , 海水的深度为 a , $k_i (i=1, 2, 3)$ 为每个区域中的传播常数. 对于实际情况(海下通讯), 由于海水对电磁波的强衰减及信号传输距离大, 电波频率一般都较低 ($< 10\text{MHz}$), 在这种情况下, 可将环天线视为一磁矩为 IS 的垂直磁偶极子. 对时间因子 $e^{j\omega t}$, 有 Sommerfeld 积分公式^[4]

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u} e^{-u|z|} J_0(\lambda\rho) d\lambda \quad (16)$$

其中 $u = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$, $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $J_0(\lambda\rho)$ 为零阶 Bessel 函数. 注意到 $J_0(x) = \frac{1}{2}[H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)]$ 和 $H_0^{(1)}(-x) = -H_0^{(2)}(x)$ ^[6], 可将上式的单边无穷积分化为双边无穷积分

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{u} e^{-u|z|} H_0^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (17)$$

借助式(17), 可得环天线在海水中的电磁场为^[3]

$$E_{\varphi} = -\frac{j\omega\mu_0 IS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{u_2} e^{-n_2|z-h_1|} + f_2(\lambda)e^{n_2z} + f_3(\lambda)e^{-n_2z} \right] \lambda H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (18)$$

$$H_{\rho} = -\frac{IS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\lambda}{u_2} e^{-n_2|z-h_1|} + f_2(\lambda)e^{n_2z} - f_3(\lambda)e^{-n_2z} \right] u_2 \lambda H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (19)$$

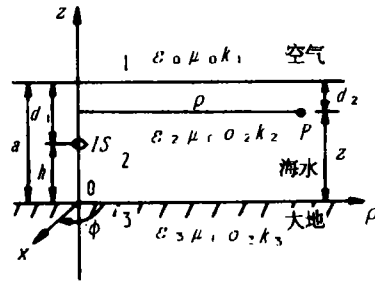


图 1 几何结构示意图

Fig. 1 Geometric configuration of electromagnetic wave propagating through layered conducting medium

$$H_z = \frac{IS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{u_2} e^{-n_2|z-h|} + f_2(\lambda)e^{n_2z} + f_3(\lambda)e^{-n_2z} \right] \lambda^2 H_0^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (20)$$

$$E_\rho = E_z = H_\varphi = 0$$

其中

$$f_2(\lambda) = -\frac{\lambda e^{-n_2 u} (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-n_2 h} + (u_1 - u_2)(u_2 + u_3) e^{n_2 h}}{u_2 (u_1 + u_2)(u_2 + u_3) e^{n_2 u} + (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-n_2 u}}$$

$$f_3(\lambda) = \frac{\lambda (u_1 + u_2)(u_2 - u_3) e^{n_2(u-h)} - (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-n_2(u-h)}}{u_2 (u_1 + u_2)(u_2 + u_3) e^{n_2 u} + (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-n_2 u}}$$

而 $u_i = (\lambda^2 - k_i^2)^{1/2}$, $i=1,2,3$, $H_0^{(2)}(x)$, $H_1^{(2)}(x)$ 分别为第二类零阶和一阶 Hankel 函数. 式(18)~(20)称为 Sommerfeld 型积分.

我们先讨论式(18). 显然积分中第一项代表从源点到场点的直接波, 其传播路径全在海水中, 由于海水对电磁波的强衰减, 这一项对远区场的贡献近似为零. 第二项代表从源点经海平面反射到场点的波, 第三项代表从源点经海底反射到场点的波. 对于我们讨论场点在海平面附近的情形 ($d_2 \ll a$, 大部份实际情形如此), 第二项代表远区场强的主要部份. 因而有

$$E_\varphi \approx \frac{j\omega\mu_0 IS}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)(u_2 + u_3) + (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-2n_2 h} \lambda^2}{(u_1 + u_2)(u_2 + u_3) + (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) e^{-2n_2 u} u_2} e^{-n_2(d_1 + d_2)} H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (21)$$

注意到 $\left| \frac{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)}{(u_2 + u_1)(u_2 + u_3)} e^{-2n_2 u} \right| < 1$ 及 $1/(1-x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m$, 我们可将式(21)中的分母展开为无穷级数, 有

$$E_\varphi = \frac{j\omega\mu_0 IS}{8\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m) + \sum_{m=0}^{\infty} \psi(m) \right\} \quad (22)$$

$$\text{其中 } \varphi(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \left[\frac{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)}{(u_2 + u_1)(u_2 + u_3)} \right]^m e^{-2n_2 m u} \frac{\lambda^2}{u_2} e^{-n_2(d_1 + d_2)} H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (23)$$

$$\psi(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u_1 - u_2)(u_2 - u_3)}{(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)} \left[\frac{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)}{(u_2 + u_1)(u_2 + u_3)} \right]^m e^{-2n_2(mu+h)} \frac{\lambda^2}{u_2} e^{-n_2(d_1 + d_2)} \cdot H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda \quad (24)$$

由复镜像理论^[7], 当满足 $|k_2^2| \gg |k_1^2|$ 时, 有

$$\frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \approx e^{-n_1 d} \quad (25)$$

其中 $d = 2/jk_2$. 对本文讨论情况, 在任何频率都有 $|k_2^2| \geq 80 |k_1^2|$ ^[3], 显然式(25)要求的条件成立. 将式(25)代入式(23), 有

$$\varphi(m) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n_1(m+1)d} \left(\frac{u_2 - u_3}{u_2 + u_3} \right)^m \frac{\lambda^2}{u_2} e^{-n_2(d_1 + d_2 + 2mu)} H_1^{(2)}(\lambda\rho) d\lambda$$

为应用上节所述方法, 将上式重新排列为

$$\varphi(m) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lambda \frac{u_1}{u_2} \left(\frac{u_2 - u_3}{u_2 + u_3} \right)^m e^{-n_2(d_1 + d_2 + 2mu)} \frac{H_1^{(2)}(\lambda\rho)}{H_0^{(2)}(\lambda\rho)} \right\} \left\{ \frac{\lambda}{u_1} e^{-n_1(m+1)d} H_0^{(2)}(\lambda\rho) \right\} d\lambda \quad (26)$$

由 Hankel 函数的大数渐近公式, 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, 有 $H_1^{(2)}(\lambda\rho)/H_0^{(2)}(\lambda\rho) \approx j$, 式(26)中被积函

数的前一部分为慢变函数, 后一部分为快变函数, 满足上节所述方法的条件. 注意到式 (17) 及 $|k_3^2| > |k_1^2| \gg |k_2^2|$ [3], 通过简单的运算, 有

$$\varphi(m) = -\frac{4k_1^2 \rho}{k_3^2 R} (m+1) \left(\frac{1-n_3}{1+n_3} \right)^m e^{-jk_2(d_1+d_2+2ma)} \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \quad (27)$$

式中 $R = [\rho^2 + (m+1)^2 d^2]^{1/2}$, $n_3 = k_3/k_2$. 对远区场, $\rho \rightarrow \infty$, 有 $R \simeq \rho$. 则

$$\varphi(m) = -\frac{4k_1^2}{k_3^2 \rho^2} (m+1) \left(\frac{1-n_3}{1+n_3} \right)^m e^{-jk_1 \rho - jk_2(d_1+d_2+2ma)}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (28)$$

同理可求得

$$\psi(m) = -\frac{4k_1^2}{k_3^2 \rho^2} (m+1) \left(\frac{1-n_3}{1+n_3} \right)^{m+1} e^{-jk_1 \rho - jk_2(d_1+d_2+2ma+2h)}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (29)$$

将式 (28)、(29) 代入式 (22), 得:

$$E_\varphi = E_\varphi(0) \left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \left(\frac{1-n_3}{1+n_3} \right)^m e^{-jk_2 \cdot 2ma} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \left(\frac{1-n_3}{1+n_3} \right)^{m+1} e^{-jk_2(2h+2ma)} \right], \quad \rho \rightarrow \infty \quad (30)$$

其中
$$E_\varphi(0) = -\frac{j\omega\mu_0 IS k_1^2}{2\pi k_3^2 \rho^2} e^{-jk_1 \rho - jk_2(d_1+d_2)} \quad (31)$$

用同样的方法可以求出式 (19) 和 (20) 的远区解析表达式, 这里就不写出了.

式 (30) 与文献 [3] 用鞍点法得出的结果完全一致. 当 $a \rightarrow \infty$ 时, 不存在海底的影响, 此时环天线位于二层导电媒质中, 注意到 $k_3^2 \simeq -j\omega\mu_0\sigma_2$, 有

$$E_\varphi = E_\varphi(0) = \frac{\omega^4 IS}{2\pi c^4 \sigma_2 r^2} e^{-jk_1 \rho - jk_2(d_1+d_2)}, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (32)$$

式中 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 为真空中光速, $r = \omega\rho/c$. 式 (32) 与文献 [2] 中结果完全一致.

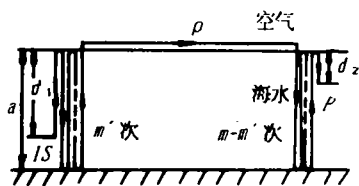


图 2 第一系列波的传播路径示意图

Fig. 2 Propagation path of the first series of waves

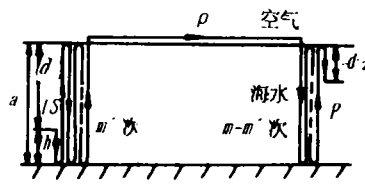


图 3 第二系列波的传播路径示意图

Fig. 3 Propagation path of the second series of waves

对式 (30) 可做如下的物理解释: 式中第一求和代表一系列波, 从源出发向上传播, 然后在海面与海底之间反射 m' 次 ($m' \leq m$), 再沿海面在空气中传播, 在场点上方进入海中并在海底与海面之间反射 $m-m'$ 次, 最后到达场点 ρ . 因子 $(m+1)$ 表示对某种在海面与海底之间共反射 m 次的波型, 共有 $m+1$ 个波 (在源点附近反射 m' 次, 在场点附近反射 $m-m'$ 次的组合, 参见图 2). $(1-n_3)/(1+n_3)$ 为海底的反射系数, 海面的反射系数近似为 1. 对第二求和代表的波可做同样的解释, 唯一的区别在于此系列波从源出发后先向下传播, 经海底反射后再向上传播, 因而此波较前述相应的波多传播了 $2h$ 的距离 (参见图 3).

参 考 文 献

- 1 Wait J R. Geo-electromagnetism. New York: Academic Press, 1982
- 2 Moore R K. Dipole radiation in a conducting half space. J Res Nat Bur Stand, 1961. 65D (5): 515~522
- 3 Arutaki A. Communication in a three-layered conducting media with a vertical magnetic dipole. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1980. AP-28 (4): 551~556
- 4 Sommerfeld A. Partial differential equations in physics. New York: Academic Press, 1949
- 5 Chew W C. A Quick way to approximate a Sommerfeld-Weyl-Type integral. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1988. AP-36 (11): 1654~1657
- 6 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1979
- 7 Bannister P R. The image theory electromagnetic fields of a horizontal electric dipole in the presence of a conducting half space. Radio Science, 1982. 17 (5): 1095~1102

A New Approach to Evaluate the Far Field of Sommerfeld-Type Integral

*Long Yunliang** *Lin Yikun*

Abstract A new approach to evaluating the far field of Sommerfeld-type integral is introduced and the rigorous error analysis is presented. The closed-form expressions of the far field of a loop antenna in a three-layered conducting medium are obtained by using the new approach with complex image theory and the analytical solutions are found to be the same with those obtained by other methods.

Keywords Sommerfeld-type integral, stratified conducting medium, complex image theory, loop antenna

* Department of Radio and Electronics, Zhongshan University, Guangzhou 510275