第33卷 第4期
1994年10月

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 33 No. 4
Oct. 1994

Lagrange 相交数的下界估计*

胡建勋
（中山大学物理学系，广州 510275）

摘 要 本文给出了 T^{2n}、CP^m 与 CP^m 的乘积中一类 Lagrange 子流形相交数的下界估计.

关键词 Lagrange 相交，Hamilton 系统，复投影空间
分类号 Q189.32

设 (M,ω) 为紧致辛流形. $L\subset M$ 为一个闭 Lagrange 子流形. 对于光滑函数 $H: R\times M\to R$，我们可以在 M 上定义一族光滑向量场 X_H 满足

$$\omega(\cdot, X_H)=\mathrm{d}_x H$$

我们称 X_H 为对应于 H 的 Hamilton 向量场. 而且微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t=X_t(\Phi_t),\quad \Phi_0=id$$

定义 M 的一族辛微分同胚. 称 Φ_1 为恰当(exact)辛微分同胚. Arnold 给出了如下猜测[1]

$$\#(L\cap\Phi_1(L))\geqslant\begin{cases}CL(L)+1,\\ SB(L),\text{若 } L \text{ 与 } \Phi_1(L)\text{ 横截相交}\end{cases}$$

其中 $CL(L)$ 为 L 的上积长，$SB(L)$ 为 L 的 Betti 数之和，继 Conley 和 Zehnder 之后[2]，又有许多数学家致力于这一猜测的研究. 其中以 Floer 的工作最为独出[3,4]. 但他的工作中有一个关键性的条件 $\pi_2(M,L)=0$. 关于 $\pi_2(M,L)\neq 0$ 时的 Lagrange 相交数估计可参见蒋美跃的工作[5~7]. 本文将在 $\pi_2(M,L)\neq 0$ 的一个特殊情形下给出 Lagrange 相交数的一个下界估计.

令
$$T^{2n}=\{(x_1,\cdots,x_{2n})\in R^{2n}\}/Z^{2n}$$

$$\omega_1=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{i+n}$$

为 T^{2n} 上标准辛结构，令

$$CP^m=S^{2m+1}/S^1=\{(y_0,\cdots,y_m)\in\mathbf{C}^{m+1}\mid\sum_{i=0}^{m}|y_i|^2=1\}/S^1$$

ω_2 为 CP^m 上标准 Kähler 结构所确定的 Kähler 形式. 则 (CP^m,ω_2) 为一紧致辛流形. 从而

收稿日期：1993-08-24
* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

我们有$(CP^m\times CP^m,\omega_2\oplus(-\omega_2))$也是紧致辛流形. 令

$M=T^{2n}\times CP^m\times CP^m,\Omega=\pi_1^*\omega_1\oplus\pi_2^*[\omega_2\oplus(-\omega_2)]$, 其中 $\pi_1:M\to T^{2n},\pi_2:M\to CP^m\times CP^m$ 为自然投影. 令

$$T^n=\{(x_1,\cdots,x_{2n})\in R^{2n}\mid x_{n+1}=\cdots=x_{2n}=0\}$$

$$L_1=\{(y_1,y_2)\in CP^m\times CP^m\mid y_1=y_2\}$$

则 T^n 和 L_1 分别为 T^{2n}和 $CP^m\times CP^m$ 的 Lagrange 子流形. 而且 $L=T^n\times L_1$ 为(M,Ω)的 Lagrange 子流形.

定理 设 $h(t,x,y_1,y_2)$为 M 上光滑函数. X_h 为相应于 $h(t,x,y_1,y_2)$的 Hamilton 向量场. Φ_t 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t=X_h(\Phi_t),\quad \Phi_0=id$$

则 $$\#(L\cap\Phi_1(L))\geqslant m+1$$

1 问题的转化

先将问题转化成欧氏空间中 Hamilton 系统的一类边值问题,然后证明这类边值问题多重解的存在性.

设 M,L 如定理所述,则 $L\cap\Phi_1(L)$中的点与边值问题

$$\dot{Z}=X_h(z(t)),z(0),\quad z(1)\in L \tag{1}$$

的解一一对应. 设 $\pi:S^{2m+1}\to CP^m$ 为投影. 我们先将 M 上光滑函数 h 延拓至 $R^{2n}\times C^{m+1}\times C^{m+1}$上. 首先,对 x 作周期延拓,得到 $R^{2n}\times CP^m\times CP^m$ 上的函数,仍记为 $h(t,x,y_1,y_2)$,定义 $R^{2n}\times C^{m+1}\times C^{m+1}$上函数 $H(t,x,y_1,y_2)$满足

(1)$H(t,x,y_1,y_2)|_{(y_1,y_2)\in S^{2m+1}\times S^{2m+1}}=h(t,x,\pi y_1,\pi y_2)$,

(2)$H(t,x,e^{i\theta_1}y_1,e^{i\theta_2}y_2)=H(t,x,y_1,y_2)$,对所有的 θ_1,θ_2.

(3)$H(t,x,y_1,y_2)$为 C^1 有界.

现在,我们在 $R^{2n}\times C^{m+1}\times C^{m+1}$上考虑 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{x}=J_1H_x(t,x,y_1,y_2),x\in R^{2n},\\ \dot{y}_1=J_2(H_{y_1}(t,x,y_1,y_2)+\lambda y_1),\\ -\dot{y}_2=J_2(H_{y_2}(t,x,y_1,y_2)+\lambda y_2),\\ (x(0),y_1(0),y_2(0)),(x(1),y_1(1),y_2(1))\in L\end{cases} \tag{2}$$

其中: $$J_1=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix},\qquad J_2=\begin{bmatrix}0 & I_{m+1}\\ -I_{m+1} & 0\end{bmatrix}$$

引理1 1)设$(x(t),y_1(t),y_2(t))$为(2)的解,则,$|y_1(t)|^2\equiv$常数, $|y_2(t)|^2\equiv$常数.

2)设$(x(t),y_1(t),y_2(t)$为(2)的解,$y_1(t)\in S^{2m+1},y_2(t)\in S^{2m+1}$,则 $z(t)=(Px(t),\pi y_1(t),\pi y_2(t))$为(1)的解. 进一步,如果$(x^1(t),y_1^1(t),y_2^1(t),\lambda_1),(x^2(t),y_1^2(t),y_2^2(t),\lambda_2)$为(2)的解,且

$$(y_1^1(t),y_2^1(t))\in S^{2m+1}\times S^{2m+1},(y_1^2(t),y_2^2(t))\in S^{2m+1}\times S^{2m+1}$$

那末

$$(Px^1(t),\pi y_1^1(t),\pi y_2^1(t))=(Px^2(t),\pi y_1^2(t),\pi y_2^2(t))$$

当且仅当　$x^1(t)\equiv x^2(t)(mod Z^{2n});\lambda_1\equiv\lambda_2(mod\pi)$

其中 $P:R^{2n}\to T^{2n}$ 为投影.

证明　1)设 $K_1(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{2}|y_1|^2$, $K_2(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{2}|y_2|^2$,则

$$\{H,K_1\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}H(t,x,e^{is}y_1,y_2)|_{s=0}=0$$

于是　$K_1(x(t),y_1(t),y_2(t))=\frac{1}{2}|y_1(t)|^2\equiv$ 常数

同理可得　$K_2(t,x(t),y_1(t),y_2(t))=\frac{1}{2}|y_2(t)|^2\equiv$ 常数

2)我们先证 $Z(t)=(Px(t),\pi y_1(t),\pi y_2(t))$ 为(1)的解. 为此,只需证明

$$\omega_2(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi y_1(t),u)=\mathrm{d}_{y_1}H(t,x(t),y_1(t),y_2(t)(u)\tag{3}$$

$$\omega_2(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi y_2(t),\nu)=\mathrm{d}_{y_2}H(t,x(t),y_1(t),y_2(t))(\nu)\tag{4}$$

$\forall\ (u,\nu)\in T_{(\pi y_1(t),\pi y_2(t))}CP^m\times CP^m$.

若用 ω_0 记 C^{m+1} 上的标准辛结构. 则可以注意到下述事实:$\pi^*\omega_2=i^*\omega_0$,其中

$$\begin{array}{ccc} S^{2m+1} & \xrightarrow{i} & C^{m+1} \\ \downarrow\pi & & \\ CP^m & & \end{array}$$

由于 $(x(t),y_1(t),y_2(t))$ 满足(2),故有

$$\omega_0(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1,v)-\mathrm{d}y_1H(t,x(t),y_1(t),y_2(t))(v)-\lambda(y_1(t),v)=0,\quad \nu\in T_{y_1(t)}C^{m+1}$$

令 $\nu\in T_{y_1(t)}S^{2m+1}$,有

$$\omega_0(i_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1,i_*v)-\mathrm{d}_{y_1}H(t,x,y_1,y_2)(i_*v)=0$$

$$i^*\omega_0(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1,\nu)-\pi^*\mathrm{d}_{y_1}h(t,x,\pi y_1,\pi y_2)(\nu)=0$$

$$\omega_2(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi y_1,\pi_*\nu)-\mathrm{d}_{y_1}h(t,x,\pi y_1,\pi y_2)(\pi_*\nu)=0$$

而 $\pi^*(T_{y_1(t)}S^{2m+1})=T_{\pi y_1(t)}CP^m$,故得(3). 类似地可得(4).

设 $(x^1(t),y_1^1(t),y_2^1(t),\lambda_1)$, $(x^2(t),y_1^2(t),y_2^2(t),\lambda_2)$ 为满足(2)的两个解,且

$$(y_1^1(t),y_2^1(t))\in S^{2m+1}\times S^{2m+1},(y_1^2(t),y_2^2(t)\in S^{2m+1}\times S^{2m+1}$$

$$(px^1(t),\pi y_1^1(t),\pi y_2^1(t))=(px^2(t),\pi y_1^2(t),\pi y_2^2(t))$$

则显然有 $x^1(t)\equiv x^2(t)(mod z^{2n})$

设 $K(t,x,y_1,y_2)=\frac{1}{2}(|y_1|^2+|y_2|^2)$. 则

$$\{H_t+\lambda K,K\}=0$$

意味着　$y_1^1(t)=e^{i\mu_1}e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}y_1^2(t)$

$$y_2^1(t)=e^{i\mu_2}e^{-i(\lambda_2-\lambda_1)t}y_2^2(t)$$

对某个实数 μ_1,μ_2. 因为

$$y_1^1(0)=y_2^1(0),\quad y_1^2(0)=y_2^2(0),$$

$$y_1^1(1)=y_2^1(0),\quad y_1^2(1)=y_2^2(1)$$

从而 $\mu_1-\mu_2\equiv 0(mod 2\pi)$, $\lambda_1-\lambda_2\equiv 0(mod\pi)$. 证毕.

引理 2 设 $(y_1,y_2)\in C^{m+1}\times C^{n+1}$, 则算子

$A_2:\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-J_2\dot{y}_1\\J_2\dot{y}_2\end{pmatrix}$ 且 $y_1(0)=y_2(0)$, $y_1(1)=y_2(1)$ 是 $L^2([0,1],C^{m+1})\times L^2([0,1],C^{m+1})$ 上的自伴算子. A_2 的定义域为

$$D(A_2)=\{H'([0,1],C^{m+1})\times H'([0,1],C^{m+1})\}\cap\{y_1(0)=y_2(0),y_1(1)=y_2(1)\}$$

A_2 的谱集为 $\mathrm{spec}(A)=\{k\pi|k\in Z\}$ 且每个 $k\pi$ 都是 $2(m+1)$ 重本征值.

算子 $A_1=-J_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为 $L^2([0,1],R^{2n})$ 上的自伴算子. A_1 的定义域为

$$D(A_1)=\{z\in H'([0,1],R^{2n})|z(0),z(1)\in T^n\}$$

引理证明和文[5]中引理 2.3 一样.

我们引进 Hilbert 空间 $E_1=D(|A_1|^{1/2})$ 和 $\Lambda=D(|A_2|^{1/2})$. 其上的范数分别为 $\|x\|_{E_1}^2=(\|x\|_{L^2}^2+\||A_1|^{1/2}x|_{L^2}^2)$ 和 $\|y\|_\Lambda^2=\|y\|_{L^2}^2+\||A_2|^{1/2}y\|_{L^2}^2$.

在 $E_1\times\Lambda$ 上, 我们定义泛函

$$I(x,y)=\int_0^1(\frac{1}{2}(-J_1\dot{x},x)+\frac{1}{2}(-J_2\dot{y}_1,y_1)+\frac{1}{2}(J_2\dot{y}_2,y_2)-H(x,y_1,y_2)\mathrm{d}t$$

其中 $y=(y_1,y_2)$.

引理 3 令

$$S=\{y\in\Lambda|\int_0^1(|y_1|^2+|y_2|^2)\mathrm{d}t=2\}$$

则 I 在 $E_1\times S$ 上的临界点满足

$$\dot{x}=J_1H_x(t,x,y_1,y_2)$$
$$\dot{y}_1=J_2(H_{y_1}(t,x,y_1,y_2)+\lambda y_1)$$
$$\dot{y}_2=-J_2(H_{y_2}(t,x,y_1,y_2)+\lambda y_2)$$

且 $|y_1(t)|^2=|y_2(t)|^2=1$, $(x(0),y_1(0),y_2(0))$, $(x(1),y_1(1),y_2(1))\in L$.

引理证明可参见文[6]中引理 2.3.

2 定理证明

假定 $h,H\geqslant 0$, 利用 $H(t,x,y_1,y_2)$ 对 x 是周期的以及 $H(t,x,e^{i\theta}y_1,e^{i\theta}y_2)=H(t,x,y_1,y_2)$, 泛函 $I(x,y_1,y_2)$ 可约化为 $T^n\times E^1\times\Lambda/S^1$ 上的泛函 $I(\xi,x,y_1,y_2)$. 这里有 $E_1=R^n\times E^1$. 通过找泛函 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 在 $T^n\times E^1\times\Lambda/S^1$ 上的临界点来证明定理. 由于 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 既不是上方有界也不是下方有界, 负空间的维数是无穷的. 文中采用有限维 Galerkin 逼近的方法求 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 的临界点. 为此, 需要引进一些记号和定义.

对自然数 k, 定义

$$E_k^1=\{x\in E^1|x=\sum_{-k}^{k}a_ie_i,\ -J_1\dot{e}_i=2\pi i\cdot e_i,|i|\leqslant k\},$$
$$\Lambda_k=\{y\in\Lambda|y\in\mathrm{span}\{f|A_2f=\mu f,|u|\leqslant k\}\},$$
$$S_k=S\cap\Lambda_k.$$

$$I_k(\xi,x,y_1,y_2)=I(\xi,x,y_1,y_2)|_{T^m\times E_k^1\times S_k/S^1}.$$

定义 1　称 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 在 $T^m\times E^1\times S/S^1$ 上满足 $(P.S)^*$ 条件，若 $(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})\in T^m\times E_k^1\times S_k/S^1$ 满足

$I_k(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})$ 有界，$I'_k(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})\to 0$，则 $(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})$ 中存在收敛子列.

命题 1　设 $H(t,x,y_1,y_2)$ 是 C^1 有界的，则 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 在 $T^m\times E^1\times S/S^1$ 上满足 $(P.S)^*$ 条件.

证明　设 $I_k(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})$ 有界，$I'_k(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})\to 0$.

我们先证 $\{x_k\}$ 有界. 事实上，由于

$$I'_{k,x}(\xi,x,y_1,y_2)=A_1x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 H(t,\xi+x,y_1,y_2)dt\right)$$

以及 H 是 C^1 有界的. 不难看出，存在整数 k_0，常数 C_1，R，使得当 $k\geqslant k_0$ 时有

$$\|I'_{k,x}\|\geqslant C_1\|x\|，当 \|x\|>R，x\in E_k^1$$

由于 $I'_k(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})\to 0$，从而有 $I'_{k,x}(\xi_k,x_k,y_{1k},y_{2k})\to 0$. 从而有 $\{x_k\}$ 有界.

剩下的证明类似于文[7]中命题 2.1. 证毕.

令 Λ_k^+ 记 A_2 的正空间，用 S_k^+ 记 $S_k\cap\Lambda_k^+$. 用 E^{1+} 记 A_1 的正空间，$E_k^{1+}=E_k^1\cap E^{1+}$. 容易看出 S_k/S^1 为 $(2k+1)(m+1)-1$ 维复投影空间，S_k^+/S^1 为 $k(m+1)-1$ 维复投影空间，从而存在非零奇异同调类

$$[Z_1]<[Z_2]<\cdots<[Z_{k(m+1)}]$$

其中 $[Z_i]\in H_*(T^m\times E_k^1\times S_k/S^1,T^m\times E_k^1\times S_k/S^1\backslash T^m\times E_k^{1+}\times S_k^+/S^1)$. $[Z]<[\omega]$，意味着存在 $\omega\in H^*(T^m\times E_k^1\times S_k/S^1)$，$\dim\omega>0$，使得 $[Z]=[\omega]\cap\omega$.

引理 4　设

$$C_i^k=\inf_{\alpha\in[Z_i]}\sup_{(x,y)\in\alpha}I_k(x,y),\ i=1,2,\cdots,k(m+1)$$

则，1) C_i^k 为 $I_k(x,y_1,y_2)$ 的临界值.

2) $C_1^k\leqslant C_2^k\leqslant\cdots\leqslant C_{k(m+1)}^k$.

3) $(l-1)2\pi-N\leqslant C_i^k\leqslant 2l\pi$，对 $(l-1)(m+1)\leqslant i\leqslant l(m+1)$，$l=1,\cdots,k$，$N$ 为 $H(t,x,y_1,y_2)$ 的上界.

引理的证明与文[5]中引理 3.2 一样(略).

令　　$C_i=\lim_{k\to\infty}C_i^k$

由 $(P.S)^*$ 条件知，C_i 均为 $I(\xi,x,y_1,y_2)$ 的临界值，且有

$$2\pi-N\leqslant C_1\leqslant\cdots\leqslant C_{l(m+1)},\leqslant 2l\pi$$

定理证明　我们已经证明 $I(x,y_1,y_2)$ 具有一列临界值满足

$$2\pi-N\leqslant C_1\leqslant\cdots\leqslant C_{l(m+1)}\leqslant 2l\pi,\ l=1,2,\cdots$$

和文[5]一样，我们可以证明 $I(x,y_1,y_2)$ 至少有 $m+1$ 个临界点使得其相应的监界值位于长度小于 2π 的区间内. 而这些临界点恰恰对应于 $L\cap\Phi_1(L)$ 中的点. 由于 $I(x,y_1,y_2)$ 的 2 个临界点对应于同一相交点当且仅当相应的 λ 的差为 $k_0\pi$. 因而有相应的临界值的差为 $k_02\pi$.

参 考 文 献

1 Arnold V I. Mathematial methods of classical mechanics. Beijing: World Publishing Corporation, 1985

2 Conley C, Zehnder E. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold. Invent Math, 1983, 73:33~49

3 Floer A. A Morse theory for Lagrangian intersections. J Diff Geom, 1988, 28:513~547

4 Floer A. A cuplenth estimates for Lagrange intersections. Comm Pure Appl Math, 1989, 42:335~356

5 Chang K C, Jiang M Y. The Lagrange intersections for (CP^n, RP^n). Mauscripta Math, 1990, 68:89~100

6 蒋美跃. 一个 Lagrange 相交定理. 北京大学学报(自然科学版), 1991, 27(3):257~263

7 蒋美跃. 一个辛不动点定理. 数学学报, 1992, 35(2):167~177

Lower Limit Estimation to Lagrangian Intersections

Hu Jianxun *

Abstract A lower limit estimation to intersection number of a class of Lagrangian submani folds in $T^{2n} \times CP^m \times CP^m$.

Keywords Lagrangian intersection, Hamiltonian system, complex projective space

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275