

对流扩散方程的高精度差分 有限元破开算子法*

黄海 李琳 张涤明

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 对于非定常二维对流扩散方程, 将二次迎风插值方法(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics, 简称 Quick 格式)与集中质量九节点等参元的有限单元法结合起来, 发展了一种有效的高精度差分有限元破开算子法. 计算结果表明, 这是一种高精度的数值模式.

关键词 对流扩散方程, 二次迎风式插值, 差分有限元破开算子法

分类号 O352

1 引 言

在污染物质输运与传热问题中出现的对流扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla C = \frac{1}{P_e} \cdot \nabla(\beta \nabla C) + q$$

式中, C 为物质浓度, \vec{v} 为对流速度, β 为扩散系数, q 为源(汇)项, P_e 为 Peclet 数, 定义:
 $P_e = V_{\infty} L / \beta_{\infty}$

对流扩散方程的数值求解, 文[1]最先提出差分有限元破开算子法, 该方法首先将方程中的时间微商项破开为两半, 然后将每个时间步的求解分开为两个“半时间步”进行. 前半步方程中只保留对流项, 采用迎风格式, 后半步方程中只保留扩散项和源项, 采用九节点等参单元的有限单元法, 并且采用边界拟合坐标系将两步的求解都方便地放在一个统一的网格上进行. 但文[1]中使用的迎风格式只有一阶精度, 与九节点的有限元在精度上是不相配合的. 为了改进此点, 在前半步处理对流项时, 作者曾采用具有二阶精度的 ADI 方法, 但实践证明 ADI 法对处理对流项来说, 远不如迎风型格式那么理想. 因此, 本文选用一种高精度的迎风格式, 即用二次迎风插值法处理对流项, 而处理扩散项采用集中质量九节点等参元有限单元法. 实际算例表明, 本方法是一种高精度的差分有限元破开算子法. 且具有较好的稳定性.

* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期: 1995-02-16 黄海, 男, 56 岁, 副教授

2 数值方法

考虑如下二维对流扩散方程的初边值问题

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - \beta \nabla^2 C = 0 \quad \text{在 } D \text{ 内} \tag{1}$$

初始条件 $C(x, y, 0) = C_0(x, y)$ 在 \bar{D} 上

边界条件 $C(x, y, t)|_{\Gamma} = f(x, y, t)$ Γ 为 D 的边界

其中, C_0, f 为给定函数, u, v 为 x, y, t 的函数.

破开算子, 方程(1) 分解为

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

对方程(2) 采用二次迎风插值差分格式^[3], 方程化为

$$\begin{aligned} & C_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - C_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \{ U_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \cdot [C_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + C_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}] - U_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} [C_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + C_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}] \} - \\ & \frac{\Delta t}{16\Delta x} \{ U_{j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla^2 C_{j+\frac{1}{2},k}^n - U_{j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla^2 C_{j-\frac{1}{2},k}^n \} + \frac{\Delta t}{4\Delta y} \{ V_{j,k+\frac{1}{2}}^n \cdot [C_{j,k+1}^n + C_{j,k}^n] - \\ & V_{j,k-\frac{1}{2}}^n [C_{j,k}^n + C_{j,k-1}^n] \} - \frac{\Delta t}{16\Delta y} \{ V_{j,k+\frac{1}{2}}^n \nabla^2 C_{j,k+\frac{1}{2}}^n - V_{j,k-\frac{1}{2}}^n \cdot \nabla^2 C_{j,k-\frac{1}{2}}^n \} = 0 \end{aligned}$$

式中, j, k 分别为 x 和 y 方向上网格结点的编号, n 为时间步长数, $\Delta t, \Delta x$ 分别为时间步长和空间步长, 以及

$$\begin{aligned} \nabla^2 C_{j+\frac{1}{2},k} &= \begin{cases} C_{j+1,k} - 2C_{j,k} + C_{j-1,k} & \text{当 } u \geq 0 \\ C_{j,k} - 2C_{j+1,k} + C_{j+2,k} & u < 0 \end{cases} \\ \nabla^2 C_{j-\frac{1}{2},k} &= \begin{cases} C_{j,k} - 2C_{j-1,k} + C_{j-2,k} & \text{当 } u \geq 0 \\ C_{j-1,k} - 2C_{j,k} + C_{j+1,k} & u < 0 \end{cases} \\ \nabla^2 C_{j,k+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} C_{j,k+1} - 2C_{j,k} + C_{j,k-1} & \text{当 } v \geq 0 \\ C_{j,k} - 2C_{j,k+1} + C_{j,k+2} & v < 0 \end{cases} \\ \nabla^2 C_{j,k-\frac{1}{2}} &= \begin{cases} C_{j,k} - 2C_{j,k-1} + C_{j,k-2} & \text{当 } v \geq 0 \\ C_{j,k-1} - 2C_{j,k} + C_{j,k+1} & v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对方程(3) 采用集中质量的有限元进行求解, 单元形式为九节点等参单元, 单元 e 内浓度可表示为

$$C^e = \sum_{i=1}^9 C_i^e \Phi_i$$

如图(1) 所示, 对于角结点

$$\Phi_i = \frac{1}{4} (\bar{x} \cdot \bar{x}_i + \bar{x}^2) (\bar{y} \cdot \bar{y}_i + \bar{y}^2), \quad (\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\pm 1, \pm 1)$$

对于边结点

$$\Phi_i = \frac{1}{2} (\bar{x} \cdot \bar{x}_i + \bar{x}^2) (1 - \bar{y}^2), \quad (\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\pm 1, 0)$$

$$\Phi_i = \frac{1}{2} (\bar{y} \cdot \bar{y}_i + \bar{y}^2) (1 - \bar{x}^2), \quad (\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (0, \pm 1)$$

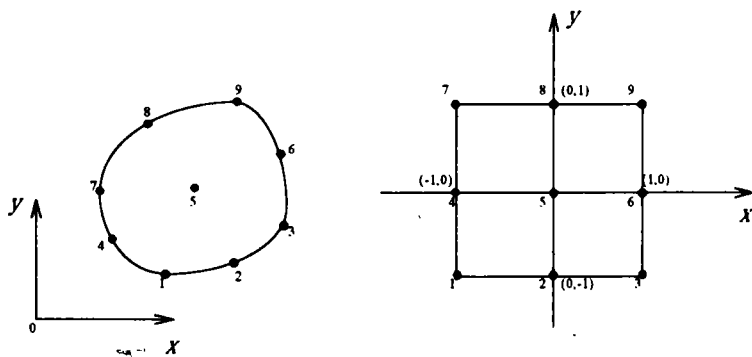


图 1 九节点等参单元

Fig. 1 Nine - node isoparametric element

对于中心结点

$$\varphi_5 = (1 - \bar{x}^2)(1 - \bar{y}^2) \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$$

方程(3)化为

$$-\left(\frac{\partial^2 C^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^{n+1}}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} C^{n+1} = \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} C^{n+\frac{1}{2}}$$

并得有限元方程

$$KC = F$$

这里, $C = C^{n+1}$, K 为总体刚度矩阵. 而在单元上, 单元刚度矩阵为

$$K^e = [K_{ij}^e] \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 9$$

并且相应地单元上的列向量

$$C^e = [C_1^e, C_2^e, \dots, C_9^e]^T, \quad F^e = [F_1^e, F_2^e, \dots, F_9^e]^T$$

其中

$$K_{i,j}^e = \iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} \varphi_i \varphi_j \right) dx dy, \quad i, j = 1, 2, \dots, 9$$

$$F_j^e = \iint_{\Omega^e} C_o \varphi_j dx dy, \quad \text{而 } C_o = \frac{1}{\Delta t \cdot \beta} C^{n+\frac{1}{2}}$$

3 数值例与结果分析

3.1 非定常二维方波问题

非定常二维方波问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \beta \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ C(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x, y \in [a, b] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} & 0 < a < b < 1 \\ C(x, y, t) \Big|_{\substack{x=0.1 \\ y=0.1}} = 0 \end{cases}$$

这里 u, v, β 为常数. 该问题有精确解.

$$C(x, y, t) = \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{b-x+ut}{\sqrt{4\beta t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{-a+x-ut}{\sqrt{4\beta t}} \right) \right\} \cdot \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{b-y+vt}{\sqrt{4\beta t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{-a+y-vt}{\sqrt{4\beta t}} \right) \right\}$$

其中, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ 为误差函数.

计算中取 $\beta = 0.1, u = v = 1000, a = 0.12, b = 0.36$, 网格宽度 $\Delta x = \Delta y = 0.05, \Delta t = 0.00025$, 计算至 $t = 0.001$, 如图 2(a) 所示, 给出 $x = 0.15$ 剖面上数值解与精确解, 可见吻合得很好, Peclet 数 $Pe = \frac{|u| \cdot \Delta x}{\beta} = 500$.

本文用 4 个循环步即达到文献[2] 算例 20 个循环步的结果.

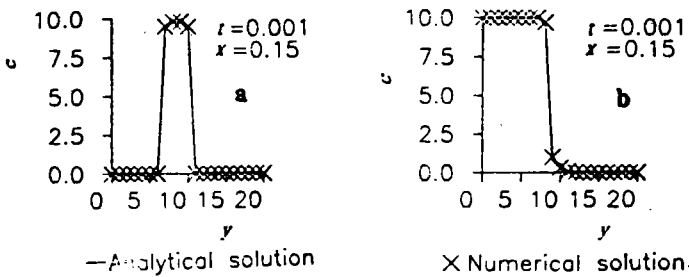


图 2 验证曲线
Fig. 2 Verification curve

3.2 二维“动激波”问题

一维“动激波”问题的二维推广(见文献[2])为

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \beta \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ c(x, y, 0) = 0 & 0 \leq x, y \leq 1 \\ C(x, y, t) = \begin{cases} 1, & \text{为 } x = 0, y = 0 \\ 0 & \text{当 } x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

当 u, v, β 为常数时, 精确解为

$$C(x, y, t) = \frac{1}{4} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x-ut}{\sqrt{4\beta t}} \right) + \exp \left(\frac{ux}{\beta} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x+ut}{\sqrt{4\beta t}} \right) \right\} \cdot \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{y-vt}{\sqrt{4\beta t}} \right) + \exp \left(\frac{vy}{\beta} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{y+vt}{\sqrt{4\beta t}} \right) \right\}$$

其中, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

取 $\beta = 10, u = v = 10, \Delta x = \Delta y = 0.05, \Delta t = 0.00025$ 计算至 $t = 0.001$, 在 $x = 0.15$ 剖面上, 如图 2(b) 所示, 给出了计算得到的数值解与精确解的比较.

两个数值算例的结果表明, 本文方法提高了近似解的精度和求解过程的稳定性.

参 考 文 献

- 1 詹杰民, 张涤明. 近海水域温排水对流扩散的数值模拟 —— 差分有限元破开算法. 中山大学学报(自然科学版), 1988, 1:54 ~ 60
- 2 忻孝康, 唐登海. 二维对流扩散方程的欧拉-拉格朗日分裂格式. 力学学报, 1989, 4:403 ~ 411
- 3 刘遂庆, R. A 弗可纳. 对流扩散方程的二次插值差分法. 上海环境科学, 1988, 6:20 ~ 24

FDM-FEM Operator-Splitting Method with High Order Accuracy for Convection-Diffusion Equation

Huang Hai Li Lin Zhang Diming*

Abstract In this paper, a ADM-FEM operating splitting method with higher order-accuracy for 2D unsteady convection-diffusion equation is developed based on [1], which combines QUICK scheme with FEM with nine point isparameter elements.

Keywords convection — diffusion equation, higher order accuracy, FDM-FEM operator-splitting method

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275