第 33 卷 第 4 期
1994 年 10 月

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 33 No. 4
Oct. 1994

齐型空间上的 ε 算子族与 Littlewood－Paley 理论

李彤彤
（中山大学数学系，广州 510275）

常心怡
（陕西师大数学系，西安 710062）

摘　要　本文定义了齐型空间上的 ε 算子族，给出了广义 Littlewood－Paley g 函数在 P 次可积函数空间上的有界性．

关键词　ε 算子族，齐型空间，g 函数
分类号　O174.3

1　定义及基本性质

R^n 上的 ε 算子族的概念是 M. Christ 与 J. L. Journé 在文〔1〕中提出的．

定义　算子族 $\{S_t\}_{t>0}: D(R^n)\to L^1_{LOC}(R^n\times R^n)$

$$S_t(f)(x)=\int_{R^n} S_t(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

称为 ε 算子族，若它的核 $S_t(x,y)$ 满足下列条件：

(1) $|S_t(x,y)|\leqslant C\, t^{\epsilon}/(t^{n+\epsilon}+|x-y|^{n+\epsilon})$，$\forall\ x,y\in R^n$；

(2) $|S_t(x,y)-S_t(x,y')|\leqslant C\left(\dfrac{|y-y'|}{t+|x-y|}\right)^{\epsilon}\dfrac{t^{\epsilon}}{t^{n+\epsilon}+|x-y|^{n+\epsilon}}$，

当 $|y-y'|<\dfrac{1}{2}(t+|x-y|)$，其中 $0<\epsilon\leqslant 1$，C 为与 x,y,y' 及 t 无关的常数.

易知这种 ε 算子族可以是非卷积算子，而在 Coifman－Weiss 意义下的齐型空间[2]上，不再有卷积和 Fourier 变换，一个自然的想法是：定义齐型空间上的 ε 算子族，以进一步讨论有关的函数空间和算子．

(X,ρ,μ) 称为一个齐型空间，若集合 X 及其上的拟距离 ρ，正 Borel 测度满足：

(1) $\mu(B(x,r))<\infty$；

(2) 存在 $C_1>0$，使得 $\mu(B(x,2r))\leqslant C_1\mu(B(x,r))$，　$\forall\ x\in X, r>0$.

引理 1　设 (X,ρ,μ) 为齐型空间，$r_0>0$，$\epsilon>0$，则

收稿日期：1993－02－24

(1) $\int_{\rho(x,y)<r_0}\frac{\rho(x,y)^\epsilon}{\mu(B(x,\rho(x,y)))}d\mu(y)\leqslant Cr_0^\epsilon$;

(2) $\int_{\rho(x,y)>r_0}\frac{1}{\rho(x,y)^\epsilon\mu(B(x,\rho(x,y)))}d\mu(y)\leqslant Cr_0^{-\epsilon}$

其中 C 仅依赖于 ϵ 及双倍常数 C_1.

证明 (1)左边 $=\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}\{y:2^{-(n+1)}r_0\leqslant\rho(x,y)<2^{-n}r_0\}}\leqslant r_0^\epsilon\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\epsilon}(C_1-1)\leqslant Cr_0^\epsilon$

同理可证明(2).

我们知道[3]，对齐型空间 (X,ρ,μ)，存在 $\delta_0>0$ 及 X 上的拟距离 ρ'，ρ' 与 ρ 等价并且 $(\rho')^{\delta_0}$ 是一个度量，而不仅仅是一个拟距离.

设 f 是定义在 X 上的函数，$\delta>0$，令

$\Lambda_\delta=\{f:f$ 在 X 上有界且有有界支集，并满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant C\rho(x,y)^\delta$，$\forall\ x,y\in X$，其中 $C=C(f)$ 为与 x,y 无关的常数$\}$.

定义 $\|f\|_{\Lambda_\delta}=\|f\|_\infty+C(f)$，令 Λ_δ' 表示 Λ_δ 的对偶空间. 为避免退化情形，相对于 (X,ρ,μ)，须令 $\delta\leqslant\delta_0$.

定义 1 算子族 $\{S_t\}_{t>0}:\Lambda_\delta(X)\to L^1_{loc}(X\times R^+)$

$$S_t(f)(x)=\int_X S_t(x,y)f(y)d\mu(y)$$

称为齐型空间 (X,ρ,μ) 上的 ϵ 算子族，若它的核 $S_t(x,y)$ 满足下列条件：

(1) $|S_t(x,y)|\leqslant C\ t^\epsilon\rho(x,y)/[(t+\rho(x,y))^{1+\epsilon}\mu(B(x,t+\rho(x,y)))$

(2) $|S_t(x,y)-S_t(x,z)|\leqslant C\left(\frac{\rho(y,z)}{t+\rho(x,y)}\right)^\epsilon\cdot\frac{t^\epsilon\rho(x,y)}{(t+\rho(x,y))^{1+\epsilon}\mu(B(x,t)+\rho(x,y))}$,

$\forall\ x,y,z\in X$，$\rho(y,z)<\frac{1}{2}(t+\rho(x,y))$，其中 $0<\epsilon\leqslant1$，$C>0$ 与 x,y,z 及 t 无关.

注 1 为简便起见，以下记 $\mu(B(x,r))$ 为 $|B(x,r)|$；

注 2 本文所讨论的齐型空间满足下列附加条件：存在常数 $a\geqslant2$ 与 $A_0>1$，使得对 $\forall\ x\in X$ 及 $0<r<\infty$，有：$|B(x,ar)|\geqslant A_0|B(x,r)|$.

2 广义 Littlewood－Plaey g 函数的 L^p 有界性

设 (X,ρ,μ) 是齐型空间，$\{S_t\}_{t>0}$ 是其上的 ϵ 算子族，定义广义 Littlewood－Paley g 函数为：

$g_X(f)(x)=\left(\int_0^\infty|S_t(f)(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$. 类似于 R^n 上的情形[4]有：

引理 2 设 $\{S_t\}_{t>0}$，$\{S_t^*\}_{t>0}$ 是 (X,ρ,μ) 上的 ϵ 算子族且 $S_t(1)=S_t^*(1)=0$，令 $T=S_tS_{st}^*$，记 T 的核为 $K(x,y)$，则对 $\forall\ s,t>0$ 存在常数 C，$\alpha>0$ 及 $\epsilon_0\in(0,\epsilon)$，使得：

(1) $|K(x,y)|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^\alpha|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$，$\forall\ x\neq y\in X$；

(2) $|K(x,y)-K(x,y')|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^\alpha\left(\frac{\rho(x,y')}{\rho(x,y)}\right)^{\epsilon_0}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$,

当 $\rho(y,y')<\frac{1}{4}\rho(x,y)$. 其中 $(s\wedge s^{-1})=\min(s,s^{-1})$.

证明　易知
$$K(x,y)=\int_X S_t(x,z)S_u(y,z)\mathrm{d}\mu(z)$$
$$=\int_X [S_t(x,z)-S_t(x,y)]S_u(y,z)\mathrm{d}\mu(z) \tag{1}$$
$$=\int_X S_t(x,z)[S_t(y,z)-S_t(y,x)]\mathrm{d}\mu(z) \tag{2}$$

由式(1)有
$$|K(x,y)|\leqslant\left|\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\right|+\left|\int_{\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)}\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant\rho(y,z)<2C_0\rho(x,y)}\right|$$
$$=\sum_{j=1}^{3}I_j$$

(其中 C_0 为 $\rho(y,z)\leqslant C_0(\rho(x,y)+\rho(x,z))$ 中的常数).

设 $0<\varepsilon'<\varepsilon$，我们有：

$$I_2\leqslant C\int_{\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)}\left(\frac{\rho(y,z)}{t+\rho(x,y)}\right)^{\varepsilon}\frac{t^{\varepsilon}\rho(x,y)}{(t+\rho(x,y))^{1+\varepsilon}|B(x,\rho(x,y))|}$$
$$\cdot\frac{(st)^{\varepsilon}\rho(y,z)}{(st+\rho(y,z))^{1+\varepsilon}|B(y,\rho(y,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C|B(x,\rho(x,y))|^{-1}\int_{\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)}\left(\frac{\rho(y,z)}{t+\rho(x,y)}\right)^{\varepsilon}$$
$$\cdot\frac{(st)^{\varepsilon'}}{\rho(y,z)^{\varepsilon'}|B(y,\rho(y,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C\,s^{\varepsilon'}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}\cdot\rho(x,y)^{\varepsilon'-\varepsilon}\cdot\int_{\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,z)}\frac{\rho(y,z)^{\varepsilon-\varepsilon'}}{|B(y,\rho(y,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C\,s^{\varepsilon'}\cdot|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$

$$I_3\leqslant\int_{\frac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant\rho(y,z)<2C_0\rho(x,y)}\left[\frac{t^{\varepsilon}\rho(x,z)}{(t+\rho(x,z))^{1+\varepsilon}|B(x,\rho(x,z))|}\right.$$
$$\left.+\frac{t^{\varepsilon}\rho(x,y)}{(t+\rho(x,y))^{1+\varepsilon}|B(x,\rho(x,y))|}\right]\cdot\frac{(st)^{\varepsilon}\rho(y,z)\mathrm{d}\mu(z)}{(st+\rho(y,z))^{1+\varepsilon}|B(y,\rho(y,z))|}$$
$$=I_{31}+I_{32}$$

$$I_{31}\leqslant\int_{\frac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant\rho(y,z)<2C_0\rho(x,y)}\frac{\rho(x,z)^{\varepsilon}}{|B(x,\rho(x,z))|}\cdot\frac{s^{\varepsilon'}}{\rho(y,z)^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{|B(y,\rho(y,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C\,s^{\varepsilon}\cdot\frac{1}{\rho(x,y)^{\varepsilon}|B(y,\rho(x,y))|}\int_{\rho(x,z)<C\rho(x,y)}\frac{\rho(x,z)^{\varepsilon}}{|B(x,\rho(x,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C\,s^{\varepsilon}\cdot|B(y,\rho(x,y))|^{-1}$$

对 I_{32} 有同样的估计，因此 $I_3\leqslant C\,s^{\varepsilon}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$.

对 I_1 分 $t\leqslant\rho(x,y)$ 及 $t>\rho(x,y)$ 两种情形估计，

当 $t\leqslant\rho(x,y)$ 时，
$$I_1\leqslant C\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\left[\frac{t^{\varepsilon}}{\rho(x,z)^{\varepsilon}|B(x,\rho(x,z))|}\right.$$
$$\left.+\frac{t^{\varepsilon}}{\rho(x,y)^{\varepsilon}|B(x,\rho(x,y))|}\right]\cdot\frac{(st)^{\varepsilon}}{\rho(y,z)^{\varepsilon}|B(y,\rho(y,z))|}\mathrm{d}\mu(z)$$

注意到 $\rho(x,z)\geqslant\frac{1}{C_0}\rho(y,z)-\rho(x,y)\geqslant\rho(x,y)$，有

$$I_1\leqslant C\,s^{\varepsilon}\cdot\frac{\rho(x,y)^{\varepsilon}}{|B(x,\rho(x,y))|}\cdot\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\rho(y,z)^{\varepsilon}|B(y,\rho(y,z))|^{-1}\mathrm{d}\mu(z)$$
$$\leqslant C\,s^{\varepsilon}\cdot|B(x,\rho(x,y))|^{-1}.$$

当 $t>\rho(x,y)$ 时，$I_1\leqslant C\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\Big[\frac{\rho(x,y)}{t\cdot|B(x,\rho(x,y))|}$

$$+\frac{t^{\epsilon}\rho(x,z)}{(t+\rho(x,z))^{1+\epsilon}|B(x,t+\rho(x,z))|}\Big]\cdot\frac{(st)^{\epsilon}\rho(y,z)\mathrm{d}\mu(z)}{(st+\rho(y,z))^{1+\epsilon}|B(y,\rho(y,z))|}=I_{11}+I_{12}$$

$$I_{11}=C\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\frac{\rho(x,y)}{|B(x,\rho(x,y))|}\cdot\frac{s^{\epsilon}}{t^{1-\epsilon}}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\rho(y,z)^{\epsilon}|B(y,\rho(y,z))|}$$
$$\leqslant C\,s^{\epsilon}\cdot|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$
$$I_{12}\leqslant C\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\frac{1}{|B(x,t)|}\cdot\frac{s^{\epsilon'}t^{\epsilon'}\mathrm{d}\mu(z)}{\rho(y,z)^{\epsilon'}|B(y,\rho(y,z))|}$$
$$\leqslant C\,s^{\epsilon'}\rho(x,y)^{-\epsilon'}\frac{t^{\epsilon'}}{|B(x,t)|}.$$

根据附加条件：存在常数 $a\geqslant 2$ 与 $A_0>1$ 使得对任意 $x\in X$，$0<r<\infty$ 有 $|B(x,ar)|\geqslant A_0|B(x,r)|$. 对任意的 t，$t>\rho(x,y)$，存在非负整数 n_0，使得 $t\in(a^{n_0}\rho(x,y),\ a^{n_0+1}\rho(x,y))$ 因此 $\frac{t^{\epsilon'}}{|B(x,t)|}\leqslant\frac{(a^{n_0+1})^{\epsilon'}\rho(x,y)^{\epsilon'}}{|B(x,a^{n_0}\rho(x,y))|}\leqslant\frac{a^{\epsilon'(n_0+1)}\rho(x,y)^{\epsilon'}}{A_0{}^{n_0}|B(x,\rho(x,y))|}$ 取 ϵ' 充分小，使得 $a^{\epsilon'}<A_0$，则得到

$$\frac{t^{\epsilon'}}{|B(x,t)|}\leqslant a\cdot\frac{\rho(x,y)^{\epsilon'}}{|B(x,\rho(x,y))|},$$

从而 $I_{12}\leqslant C\,s^{\epsilon'}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$.

由于只需考虑 $s\leqslant 1$ 的情形，至此我们证明了存在 $\alpha>0$，使得

$$|K(x,y)|\leqslant C\,s^{\alpha}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$

类似地，由式(2)，有

$$|K(x,y)|\leqslant\Big|\int_{\rho(x,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\Big|+\Big|\int_{\rho(x,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)}\Big|+\Big|\int_{\frac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)<2C_0\rho(x,y)}\Big|$$
$$=\sum_{j=1}^{3}J_j$$

分别估计 $J_j(j=1,2,3)$，取 ϵ' 同上，我们有

$$|K(x,y)|\leqslant C\Big[\Big(\frac{1}{s}\Big)^{\epsilon}+\Big(\frac{1}{s}\Big)^{\epsilon'}\Big]\cdot|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$

因此当 $s\geqslant 1$ 时，我们有：$|K(x,y)|\leqslant C\Big(\frac{1}{s}\Big)^{\alpha}\cdot|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$，其中 α 同上. 从而对任意 $s>0$，$t>0$，有

$$|K(x,y)|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^{\alpha}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}.$$

由此可得

$$|K(x,y)-K(x,y')|+|K(y,x)-K(y,x')|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^{\alpha}|B(x,\rho(x,y))|^{-1}. \tag{3}$$

若能证明当 $\rho(y,y')<\frac{1}{4}\rho(x,y)$ 时，

$$|K(x,y)-K(x,y')|+|K(y,x)-K(y',x)|\leqslant C\Big(\frac{\rho(y,y')}{\rho(x,y)}\Big)^{\epsilon}|B(x,\rho(x,y))|^{-1} \tag{4}$$

则二者取几何平均即证明了引理中不等式(2). 事实上，$|K(x,y)-K(x,y')|$

$$=\int_X S_t(x,z)[S_{st}(y,z)-S_{st}(y',z)]\mathrm{d}\mu(z)=\Big|\int_X[S_t(x,z)-S_t(x,y)]\cdot[S_{st}(y,z)$$

$$-S_u(y^6,z)]\mathrm{d}\mu(z)\Big|\leqslant\Big|\int_{\rho(y,z)\geqslant 2C_0\rho(x,y)}\Big|+\Big|\int_{\frac{1}{2}\rho(x,y)\leqslant\rho(y,z)<2C_0\rho(x,y)}\Big|$$

$$+\Big|\int_{2\rho(y,y')\leqslant\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)}\Big|+\Big|\int_{\rho(y,z)<2\rho(y,y')}\Big|$$

则当 $\rho(y,y')<\frac{1}{4}\rho(x,y)$ 时

$$|K(x,y)-K(x,y')|\leqslant C\left(\frac{\rho(y,y')}{\rho(x,y)}\right)\cdot\frac{1}{|B(x,\rho(x,y))|}$$

对 $|K(y,x)-K(y',x)|$ 有同样的估计，从而(4)式得证．

引理 2 证毕．

定理 1　设 $\{S_t\}_{t>0}$，$\{S_t^*\}_{t>0}$ 及 T 皆同引理 2，则 T 在 $L^2(X)$ 上有界，且其算子模被 $C(s\wedge s^{-1})^{\alpha}$ 控制，其中 $C,\alpha>0$ 与 s,t 无关．

为了证明定理 1，我们需要齐型空间上的 $T(1)$ 定理(见[3])．

设 $T:\wedge_\delta\to\wedge_\delta'$ 是一个连续线性映射，当 $f,g\in\wedge_\delta$ 且 $\rho(\mathrm{supp}\ f,\mathrm{supp}\ g)>0$ 时

$$<Tf,g>=\iint K(x,y)f(y)g(x)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)$$

其中 $K:X\times X\backslash\{x=y\}\to\mathbb{C}$ 在其定义域内局部可积且存在 C，$\varepsilon>0$，使得对$\forall\ x,y,z\in X$，$x\neq y$ 且 $\rho(y,z)<\frac{1}{2}\rho(x,y)$ 有：

(1) $|K(x,y)|\leqslant C|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$

(2) $|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leqslant C\cdot\left(\frac{\rho(y,z)}{\rho(x,y)}\right)^{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|B(x,\rho(x,y))|}$.

则 T 在 $L^2(X)$ 上有界当且仅当 $T(1),T^*(1)\in BMO$ 且 $T\in WBP$.

我们称 T 是弱有界的，即 $T\in WBP$，若存在 $\delta\in(0,\delta_0]$ 及 $C<\infty$，使得对$\forall\ x\in X$，$r>0$ 及 φ，$\psi\in A(\delta,x,r)$ 有 $|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C\ |B(x,r)|$．其中

$A(\delta,x,r)=\{\varphi\in\wedge_\delta:\mathrm{supp}\ \varphi\subseteq B(x,r)$，$\|\varphi\|_\infty\leqslant 1$ 且 $|\varphi(y)-\varphi(z)|\leqslant r^{-\delta}\rho(y,z)^{\delta}$，$\forall\ y,z\in X\}$.

为证明定理 1，由于 $T(1)=T^*(1)=0$，因此只须验证 $T\in WBP$．设 $\varphi,\psi\in A(\delta,x_0,r)$，$x_0\in X,r>0$，$\delta\in(0,\delta_0)$ 且 $\delta<\varepsilon$，$\rho(\mathrm{supp}\ \varphi,\mathrm{supp}\psi)>0$，则

$$\langle T\varphi,\psi\rangle=\iiint S_t(x,z)S_u(y,z)\varphi(y)\psi(x)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\iiint[S_t(x,z)-S_t(x,y)]S_u(y,z)\varphi(y)\psi(x)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\tag{5}$$

$$=\iiint S_t(x,z)[S_u(y,z)-S_u(y,x)]\varphi(y)\psi(x)\mathrm{d}\mu(z)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\tag{6}$$

$$=\iiint S_t(x,z)S_u(y,z)[\varphi(y)-\varphi(z)]\psi(x)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(z)\tag{7}$$

$$=\iiint S_t(x,z)S_u(y,z)[\psi(x)-\psi(z)]\varphi(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(z)\tag{8}$$

当 $t\leqslant r$ 时，由式(7)得

$$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C(s^{\frac{\delta}{2}}+s^{\varepsilon})|B(x_0,r)|$$

当 $t\geqslant r$ 时，取 ε' 充分小使得 $0<\varepsilon'<\varepsilon$ 且 $a^{\varepsilon'}<A_0$(同引理 2)，则由式(5)得

$$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C(s^{\varepsilon}+s^{\varepsilon'})|B(x_0,r)|$$

这就证明了当 $0<s\leqslant 1$ 时，存在 $\alpha>0$，使得

$$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C\, s^{\alpha}|B(x_0,r)|.$$

另一方面，当 $t\leqslant\frac{r}{s}$ 时由(8)式有：$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C(s^{-\frac{\delta}{2}}+s^{-\epsilon})|B(x_0,r)|$ 当 $t\geqslant\frac{r}{s}$ 时由(6)式有：$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C(s^{-\epsilon}+s^{-\epsilon'})|B(x_0,r)|$ 因此当 $s\geqslant1$ 时有：$|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha}|B(x_0,r)|$，$\alpha$ 同上．

从而 $|\langle T\varphi,\psi\rangle|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^{\alpha}|B(x_0,r)|$，定理 1 证毕．

考察定理 1 及引理 2 的证明可知，当 $T=S_u^{*}S_t(\{S_t\}_{t>0},\{S_t^{*}\}_{t>0}$ 同引理 2)时，有同样的结果．

引理 3[1](Cotlar－knappe－Stein 引理) 设 $\{R_t\}_{t>0}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一族算子，若对某个 $\delta>0$ 及所有 $s,t>0$，存在常数 C 使得：

$$\|R_s^{*}R_t\|+\|R_tR_s^{*}\|\leqslant C(s\wedge s^{-1})^{\epsilon}$$

则 $\int_0^{\infty}R_t\frac{dt}{t}$ 定义一个有界算子且是强收敛的．亦即对 $\forall\, x\in H$，$\int_0^{\infty}\|R_tx\|^2\frac{dt}{t}\leqslant c\,\|x\|^2$．

根据定理 1 的结论及其后的说明，在引理 3 中令 $H=L^2(X)$，则有 $\|g_X(f)\|_2^2\leqslant C\,\|f\|_2^2$，$\forall\, f\in L^2(X)$．

设 B 为 Banach 空间，定义

$$L_B^p(X)=\{F:X\to B,F\text{ 强可测且 }\|F\|_{P.B}=(\int_X\|F(x)\|_B^P d\mu(x))^{\frac{1}{P}}<\infty\}$$

类似于 R^n 上的情形[5~7]，我们有

定理 2　设 B_1,B_2 为 Banach 空间，$K:X\times X\to\mathscr{B}(B_1,B_2)$ 连续有界($\mathscr{B}(B_1,B_2)$ 表示 $B_1\to B_2$ 的连续线性算子全体)且对某个 ϵ 满足以下估计：

(1) $\|k(x,y)\|_{\mathscr{B}(B_1,B_2)}\leqslant C_1|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$，　$\forall\, x\neq y\in X$

(2) $\|K(x,y)-K(x,y')\|_{\mathscr{B}(B_1,B_2)}+\|K(y,x)-K(y',x)\|_{\mathscr{B}(B_1,B_2)}$

$$\leqslant C_2\left(\frac{\rho(y,y')}{\rho(x,y)}\right)^{\epsilon}|B(x,\rho(x,y))|^{-1},\quad \text{当 }\rho(y,y')<\frac{1}{2}\rho(x,y)$$

设 $T(f)(x)=\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y)$ 对某个 $q\in(1,\infty)$ 定义一个 $L_{B_1}^q\to L_{B_2}^q$ 的有界算子，则当 $\rho\in(1,\infty)$ 时，$\|Tf\|_{P.B_2}\leqslant A_1\|f\|_{P.B_1}$；当 $P=1$ 时，对 $\forall\,\lambda>0$，有

$$|\{x\in X:\|T(f)(x)\|_{B_2}>\lambda\}|\leqslant\frac{A_2}{\lambda}\|f\|_{1.B_1}$$

其中 A_1,A_2 仅依赖于 P,q,ϵ,n 及 C_1,C_2(证明略)．

设 $\{S_t\}_{t>0}$，$\{S_t^{*}\}_{t>0}$ 为 ϵ 算子族且对 $\forall\, t>0$ 有 $S_t(1)=S_t^{*}(1)=0$. 在定理 2 中令 $B_1=$ **C**，$B_2=L^2(R^+,\frac{dt}{t})$，$K_\eta(x,y)=S_t(x,y)\chi_{0<t\leqslant\frac{1}{\eta}}$，$\eta>0$，$T_\eta$ 表示以 $K_\eta(x,y)$ 为核的积分算子，我们有：

$$\|K_0(x,y)\|_{\mathscr{B}(B_1,B_2)}\leqslant C\left(\int_0^{\infty}|S_t(x,y)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^{\rho(x,y)}+\int_{\rho(x,y)}^{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_1|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$

同理由 $\{S_t\}_{t>0}$ 及 $\{S_t^{*}\}_{t>0}$ 的光滑性可知 $K_\eta(x,y)$ 关于 η 一致地满足定理 2 中条件(2)，从而

由定理 2 及 $\| g_X(f) \|_2 \leqslant C \| f \|_2$ 有，$\| T_\eta f \|_p \leqslant C \| f \|_p$，$C$ 对 η 一致．令 $\eta \to 0$ 就得到 $\| g_X(f) \|_p \leqslant C \| f \|_p$，$\forall f \in L^p(X)$，总之，有：

定理 3　设 $\{S_t\}_{t>0}$，$\{S_t^*\}_{t>0}$ 为齐型空间 (X,ρ,μ) 上的 ε 算子族，且对 $\forall t>0$ 有 $S_t(1)=S_t^*(1)=0$，则当 $P\in(1,\infty)$ 时，存在 $C>0$ 使得 $\| g_X(f) \|_p \leqslant C \| f \|_p$，$\forall f \in L^p(X)$．

参 考 文 献

1 Christ M, Journé J. Estimates for multilinear singular operator with polynomial growth. Acta Mathematica, 1987, 159: 51～80

2 Coifman R R, Weiss G. Extensions of Hardy Spaces and their uses in analysis. Bull Amer Math Soc, 1977, 83: 569～646

3 Christ M. Lectures on Singular integral operators, manuscripts, April 2, 1990

4 邓东皋，韩永生．Besov 空间与 Triebel-Lizorkin 空间的刻画与 ε 算子族．北京大学学报(自然科学版)，1990，26(3)：267～279

5 Ruiz F J, Jose L. Torrea, Vector-Valued Calderon-Zygmund theory and Carleson measures on spaces of homogeneous nature, Studia Mathematica, T. LXXXVII (1988) 221～243

6 Torchinsky A. Real Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, INC, 1986

7 Stein, E M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, 1970

ε-Family of Operators on Spaces of Homogeneous Type and the Littlewood-Paley Theory

Li Tongtong *　　*Chang Xinyi*

Abstract　The definition of ε-family of operators on spaces of homogeneous type is given. We also show the $L^p (1<p<\infty)$ boundedness of the generalized Littlewood-Paley g-function.

Keywords　ε-family of operators, space of homogeneous type, g-function

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275