

# 求解定常栅板绕流的区域分裂法

武云海

(中山大学计算机科学系, 广州 510275)

**摘要** 把区域分裂法的思想用于定常栅板绕流问题, 构造了多子区域的算法, 数值模拟这一流动问题, 为求解此问题的异步并行算法提供了可能性.

**关键词** 定常流动, 垂直栅板, 区域分裂

**分类号** O241.82

## 1 基本问题

假定栅板长度为  $2H_w$ , 栅板中心距为  $2H_c$ , 垂直于栅板方向的流体运动速度为  $U$ . 此运动满足无量纲化二维定常  $N-S$  方程

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\omega \\ \Delta\omega = Re \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \\ u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\psi$  是流函数,  $\omega$  是涡函数,  $Re = UH_w/r$  是雷诺数,  $r$  为动力粘性系数.

边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 & x = 0^-, x = 0^+, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow 1 & x \rightarrow \infty, 0 \leq y \leq \beta \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} \rightarrow 0, \frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow 1 & x \rightarrow -\infty, 0 \leq y \leq \beta \\ \psi = 0, \omega = 0 & y = 0, -\infty < x < \infty \\ \psi = \beta, \omega = 0 & y = \beta, -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\beta = H_c/H_w$ ,  $0^-$  和  $0^+$  分别表示栅板左右边.

收稿日期: 1993-10-22

分析 Ingham 的实验结果<sup>[1]</sup>, 在具体计算中, 由于 Reynolds 数的增加而使栅板后的涡旋变大, 从而  $x$  的正方向上的边界条件必须在足够远处建立, 一可以完整地算出涡旋, 二能够较精确地满足正方向的无穷边界条件. 为了针对性的计算, 做变换

$$\eta = Ln(1+x), \text{ 对 } x > 0$$

于是方程 (1) 转换为

$$\begin{cases} e^{-2\eta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \\ e^{-2\eta} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = e^\eta Re \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3)$$

依据 Wilson<sup>[2]</sup>和 Bramley & Dennis<sup>[3]</sup>, 我们推导出渐近边界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim -\alpha(\psi - y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} \sim -\alpha\omega & x \rightarrow -\infty \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \sim -\alpha^*(\psi - y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \sim -\alpha^* e^\eta \omega & \eta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\alpha = -\frac{1}{2} (Re + \sqrt{Re^2 + 4\pi^2})$ ,  $\alpha^* = -\frac{1}{2} (Re - \sqrt{Re^2 + 4\pi^2})$ .

## 2 区域分裂法

根据 [4] 的区域分裂思想, 构造相应的计算方法. 把求解区域  $\Omega = \{ (x, y) \mid x_L \leq x \leq x_R, 0 \leq y \leq \beta \}$  分解为如图 1 所示的  $\Omega_1, \Omega_2$  与  $\Omega_3$ . 其中  $\Gamma_1', \Gamma_3'$  与  $\Gamma_2' (= \Gamma_{21}' \cup \Gamma_{22}')$  分别是  $\Omega_1, \Omega_3$  与  $\Omega_2$  的拟边界,  $\Omega_2 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$ . 于是可以把原问题分解为在 3 个子区域上的 3 个子问题, 且在  $\Omega_1$  中满足方程 (1), 在  $\Omega_{21}$  与  $\Omega_{22}$  中分别满足方程 (1) 与 (3), 在  $\Omega_3$  中满足方程 (3).

### 2.1 边界处理与奇点处理

对图 1 所示区域采用正规网格剖分, 取  $x$  (或  $\eta$ ) 方向上的步长为  $h$ ,  $y$  方向上的步长为  $k$ . 在  $x$  负方向和  $\eta$  正方向上的渐近边界条件 (4) 分别用一阶向前和向后差分离散化. 对栅板上的无滑条件, 利用 Woods<sup>[5]</sup>的方法有

$$\begin{cases} \omega(0^+, y) = -3\psi(h, y) / (e^h - 1)^2 - \omega(h, y) / 2 \\ \omega(0^-, y) = -3\psi(-h, y) / h^2 - \omega(-h, y) / 2 \end{cases} \quad (5)$$

下面考虑奇点  $(0, 1)$ . Dennis & Smith<sup>[6]</sup>对台阶问题提供了一种方法, 即用点  $(0, 1+k), (h, 1), (-h, 1), (h, 1+2k)$  和  $(-h, 1+2k)$  构造差分格式, 从而避开了点  $(0, 1)$ . 我们用此方法进行计算, 发现效果不好. 另一种处理方法是依据 Moffatt<sup>[7]</sup>等的理论, 在点  $S$  附近, 方程 (1) 可简化成双调合方程  $\Delta^2 \psi = 0$ , 且能够写出解的形式

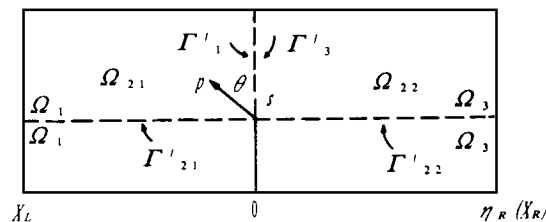


图 1 区域分裂

Fig. 1 Domain partition

$$\psi = P^{\lambda} F(\theta)$$

其中  $(P, \theta)$  是图 1 中的极坐标. 于是得到满足边界条件 (2) 的解为

$$\begin{aligned} \psi \sim & P^{\frac{3}{2}} \left( \frac{A}{3} \cos \frac{3\theta}{2} + A \cos \frac{\theta}{2} - B \sin \frac{3\theta}{2} + B \sin \frac{\theta}{2} \right) + P^2 C (1 - \cos 2\theta) \\ & + P^{\frac{5}{2}} \left( -\frac{D}{5} \cos \frac{5\theta}{2} + D \cos \frac{\theta}{2} - E \sin \frac{5\theta}{2} + E \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ & + P^3 \left( -F \cos 3\theta + F \cos \theta - \frac{G}{3} \sin 3\theta + G \sin \theta \right) + \dots, \\ \omega \sim & P^{-\frac{1}{2}} \left( -2A \cos \frac{\theta}{2} + 2B \sin \frac{\theta}{2} \right) - 4C - P^{\frac{1}{2}} \left( -6D \cos \frac{\theta}{2} - 6E \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ & + P \left( -8F \cos \theta - 8G \sin \theta \right) + \dots. \end{aligned}$$

其中  $A, B, C, D, E, F$  和  $G$  是待定系数.

先考虑  $Re=0$  的情况, 此时关于  $\theta=0$  流动是对称的, 则  $B=E=G=0$ . 由  $\psi(0, 1+k)$  与  $\omega(0, 1-k)$  即可确定  $A$  与  $G$ , 从而得出

$$\omega(h, 1) \doteq \frac{3}{4} \sqrt{2} h^{-2} \psi(0, 1+k) + \omega(0^+, 1-k) \quad (6)$$

$$\omega(-h, 1) \doteq -\frac{3}{4} \sqrt{2} h^{-2} \psi(0, 1+k) + \omega(0^-, 1-k) \quad (7)$$

$$\omega(0, 1+k) \doteq -\frac{3}{2} k^{-2} \psi(0, 1+k) + \omega(0^-, 1-k) \quad (8)$$

对固定网格剖分得到对  $Re=0$  情况下收敛解, 之后, 以此解作为求解  $Re=4$  的初始值. 此时关于  $\theta=0$  流动不再具有对称性, 我们不难利用  $\psi(0, 1+k)$  与  $\omega(0^-, 1-k)$  和  $\omega(0^+, 1-k)$  来确定系数  $A, B$  与  $C$ , 从而推出

$$\begin{aligned} \omega(h, 1) \doteq & -\frac{3}{4} \sqrt{2} (e^h - 1)^{-\frac{1}{2}k - \frac{3}{2}} \psi(0, 1+k) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (e^h - 1)^{-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}} \right] \\ & \cdot \omega(0^+, 1-k) + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} (e^h - 1)^{-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}} \right] \omega(0^-, 1-k) \end{aligned} \quad (6')$$

$$\begin{aligned} \omega(-h, 1) \doteq & -\frac{3}{4} \sqrt{2} h^{-\frac{1}{2}k - \frac{3}{2}} \psi(0, 1+k) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} h^{-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}} \right) \\ & \cdot \omega(0^-, 1-k) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} h^{-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}} \right) \omega(0^+, 1-k) \end{aligned} \quad (7')$$

$$\omega(0, 1+k) \doteq -\frac{3}{2} k^{-2} \psi(0, 1+k) + \frac{1}{2} [\omega(0^+, 1-k) + \omega(0^-, 1-k)] \quad (8')$$

于是我们建立了奇点  $S$  附近的离散化方程.

## 2.2 计算格式

对 Laplace 算子  $\Delta$  用通常的五点差分格式离散化, 对一次导数采用向后差分离散, 对算子  $\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$  的离散化使用 Greenspan<sup>[6]</sup> 的增强对角优势的向前——向后技巧, 对最靠近栅板的网格点都采用上节所述的离散方式, 从而在每个子区域上构造出各自的离散化方程.

在  $\Omega_1$  中, 求解方程 (1), 对  $\psi$  与  $\omega$  都使用与 [8] 相似的逐点松弛计算格式. 注意此时在栅板附近的网格点上有些小变化.

在  $\Omega_3$  中, 我们求解方程 (3), 同样采用类似与 Greenspan<sup>[8]</sup> 的逐点松弛法, 计算  $\psi$  与  $\omega$ . 在  $\Omega_2$  中, 对于  $\Omega_{21}$  使用与在  $\Omega_1$  中完全相同的方法, 对于  $\Omega_{22}$  采用与在  $\Omega_3$  中同样的格式.

### 3 计算实例

由于机器的限制, 我们只有在串型机上交替运算. 定义交替次序为  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \rightarrow \Omega_3 \rightarrow \Omega_2 \rightarrow \Omega_3 \rightarrow \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ , 并重复进行. 取  $\beta=2$ , 即  $H_c=2, H_w=1$ , 取网格步长  $h=k=\frac{1}{20}$ . 在求解流函数松弛时, 用松弛因子  $\mu_1=0.95$ ; 在求解涡函数时, 选用松弛因子  $\mu_2=0.8$ ; 对两种情况, 在拟边界松弛时, 选用松弛因子  $\mu=0.6$ . 取  $x_L=-4, x_R=e^4-1$ , 或  $\eta_R=4$ . 采用最大模范数, 即在每个子区域  $\Omega_j (j=1, 2, 3)$  的内点上函数值绝对误差的最大值, 取对  $\psi$  与  $\omega$  的误差控制量  $\epsilon_1=\epsilon_2=10^{-5}$ .

分别对  $Re=4.0, 17.9, 30.0$ , 通过数值运算绘出了流线图 (图 2). 与 [1] 等的结果比较, 描述了这一绕流问题. 图 3 (a) 是对  $Re=4.0$  的情况, 流线从外到里分别为  $\psi=1.7, 1.1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.0001$ , 而从涡旋里到外分别为  $\psi=-0.07, -0.007, 0$ .  $Re=17.9$  由图 2 (b) 描述, 流线从外到里分别是  $\psi=1.7, 1.1, 0.7, 0.5, 0.1, 0.01$ , 而从涡旋里到外分别是  $\psi=-0.11, -0.07, -0.05, -0.01, 0$ . 最后  $Re=30.0$  的情况由图 2 (c) 表出, 流线从外及里分别为  $\psi=1.7, 1.1, 0.7, 0.5, 0.1, 0.01$ , 而涡旋内及外分别为  $\psi=-0.17, -0.11, -0.07, -0.01, 0$ .

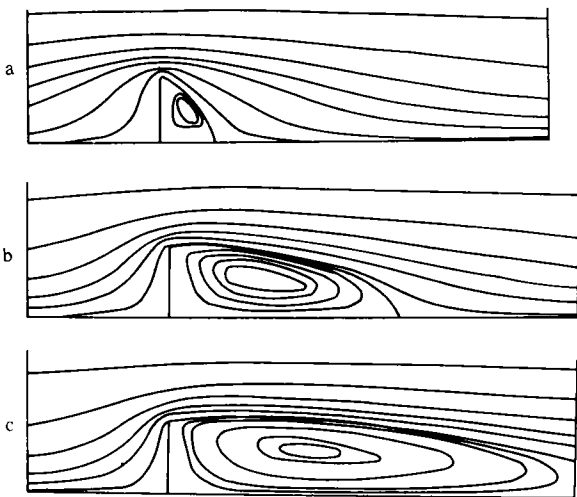


图 2  $Re$  分别为 4.0, 17.9, 30.0 时的流线图

Fig. 2 Streamlines for (a)  $Re=4.0$ ; (b)  $Re=17.9$ ; (c)  $Re=30.0$

注意在运算中每个子区域上的子问题都使用自己拟边界上最新的值, 且在每个子区域中的求解顺序为  $\omega^{0(j)} \rightarrow \psi^{1(j)} \rightarrow \omega^{1(j)} \rightarrow \psi^{2(j)} \rightarrow \dots \rightarrow \omega^{l-1(j)} \rightarrow \psi^{l(j)} \rightarrow \dots (j=1, 2, 3)$ .

## 参 考 文 献

- 1 Ingham D B, Tang T, Morton B R. Numerical and experimental solutions for steady flow through a cascade of normal flat plates, Manuscript, 1988
- 2 Wilson S D R, The development of Poiseuille flow, J. Fluid Mech 1969, 38, 793
- 3 Bramley J S, Dennis S C R. Lecture Notes in Phys. Springer—Verlag, Berlin, 1982, 170, 155
- 4 康立山, 孙乐林, 陈毓屏. 解数学物理问题的异步并行算法. 北京: 科学出版社, 1985
- 5 Woods L C. Aeronaut Q. 1954, 5, 176
- 6 Dennis S C R, Smith F T. Steady flow through a channel with a symmetrical constriction in the form of a step, Proc Soc Lond. 1980. A372, 393
- 7 Moffatt H K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner, J Fluid Mech 1964, 18, 1
- 8 Greenspan D. Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering, Academic Press, 1974. 643~655

## Domain Decomposition Methods for Steady Flow through a Cascade of Normal Flat Plates

*Wu Yunhai* \*

**Abstract** Numerical solutions of the problem for the two-dimensional steady flow through a uniform cascade of normal flat plates are studied by the domain decomposition methods. An asymptotic solution is employed for both upstream and downstream. Two methods are presented for dealing with the singularity in the vorticity at the edges of the plates. Numerical solution has been obtained for Reynolds Numbers in the range of 0 to 30.

**Keywords** steady flow, cascade of normal flat plates, domain decomposition methods

---

\* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275