

## 两转镜扫描 LP 的工作原理和特性研究

邹书文 黄光桂 许海舟

(中山大学物理学系, 广州 510275)

**摘要** 阐述两转镜扫描激光投射仪的工作原理和特性. 分析系统可形成的函数图象和形成条件, 以及构图受到的限制和增加图象效果的方法.

**关键词** 圆扫描, 转速比, 函数图象, 闪烁频数

**分类号** TN249

激光娱乐工业 (Laser - Entertainment Industry) 在世界各地尤其是在发达国家正蓬勃兴起. 在当今这一工业的众多产品中, 基于光束扫描和光的特性工作的激光投射仪<sup>(1)</sup> (Laser Projector - LP), 由于采用先进的光学元件和计算机控制系统, 可产生数千个不同的光学图象而引人注目. 我国的激光娱乐工业起步较迟, 但发展迅速, 产品市场日见繁荣. 我们根据对光束的圆扫描和光的反射等现象研制了激光投射仪.

### 1 圆扫描的产生和扫描函数

一对底面有一倾角  $\beta$  的圆形镜面在绕垂直底面的转轴转动时, 入射于其表面的反射光束产生圆扫描, 结果是在距离  $l$  的屏幕上形成一稳定的半径为  $a$  的扫描圆, 如图 1 (a) 所示. 根据光的反射定律, 有  $a = 2l\beta$ , 因而改变倾角即可改变扫描圆的大小.

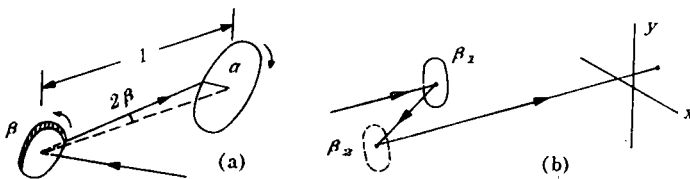


图 1 两扫描转镜投射系统

Fig. 1 Two rotating mirrors projection system

现考虑激光束先后经两个不同倾角适当放置的镜面反射后才投射于屏幕上, 如图 1 (b). 如果两镜面分别以角速度  $\omega_1$  和  $\omega_2$  转动, 那么经转镜的先后两次圆扫描, 光束在屏幕上形成的图形, 应是较为复杂的两扫描圆的合成图形. 根据运动的合成原理, 对于屏

收稿日期: 1994-11-10; 修改稿收回日期: 1995-09-11 邹书文, 男, 56 岁, 副教授

幕上的二维直角坐标系,并用角位移  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别代表  $\omega_1 t$  和  $\omega_2 t$ ,合成图形可由下面的函数方程式表示(设两扫描圆的光点旋转方向相同)

$$x = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_0), \quad y = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin(\varphi_2 + \varphi_0) \quad (1)$$

这里,  $a_1, a_2$  分别为与两转镜相应的扫描圆的半径;  $\varphi_0$  为转镜 2 相对转镜 1 的初位相.

## 2 可形成的图形和形成条件

为构得屏幕上图形,首先应确定由方程式(1)能给出哪些具体曲线.为便于推导令  $\varphi_0 = 0$ ,且设  $\omega_1 : \omega_2$  的比值为  $k_1 : k_2$ ,亦即有  $\varphi_1 / \varphi_2 = k_1 / k_2$ .考虑到对应两扫描圆的不同旋转方向的图形有较大的区别,现按方向把图形分为两类来讨论.

2.1 同向图形 在旋转方向相同条件下,改变镜面倾角使  $a_1, a_2$  为一些这样的值:

(1)  $a_1 = a_2 = a$ . 将式(1)改为极坐标  $(\rho, \theta)$  表示,则有

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (2)$$

$$\cos \theta = x / \rho = (a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) / \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

$$\text{可得} \quad \rho = 2a \cos [(\varphi_1 - \varphi_2) / 2] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) / (2 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) = [\cos(\varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) + \\ &\quad \cos(\varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})] / (2 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{即有} \quad \theta = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2 \quad (6)$$

式(6)代入式(4)且  $\varphi_1 / \varphi_2 = k_1 / k_2$ ,因而得

$$\rho = 2a \cos \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \theta \quad (7)$$

根据有关文献手册<sup>①</sup>可知,这是“玫瑰线”的极坐标方程形式.因此,通过选择两转镜的转速比  $k_1 : k_2$ ,得到的函数图象为一系列玫瑰线.如:  $2 : 1 \quad \rho = 2a \cos(\theta/3)$  1 瓣玫瑰;  $3 : 1 \quad \rho = 2a \cos(\theta/2)$  2 瓣玫瑰;  $5 : 2 \quad \rho = 2a \cos(3\theta/7)$  3 瓣玫瑰.

(2)  $a_1 \neq a_2$ , 但有  $a_1 / a_2 = \varphi_2 / \varphi_1$ , 即转速与倾角成反比.令  $a_2 = a, \varphi_1 = \varphi$ , 由式(1)即可得

$$x = \frac{k_2}{k_1} a \cos \varphi + a \cos \frac{k_2}{k_1} \varphi, \quad y = \frac{k_2}{k_1} a \sin \varphi + a \sin \frac{k_2}{k_1} \varphi \quad (8)$$

与文献[2]给的结果相比较可得,这是“旋轮线”的参数方程式.因而,通过选择不同的转速比得到的函数图象为一系列旋轮线.如,当  $k_2 : k_1 = 2 : 1$  时,即可由上式化简经坐标平移得

$$x = 2a \cos \varphi (1 + \cos \varphi), \quad y = 2a \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$$

这是动圆与不动圆半径相等亦即只有一个分支的圆外旋轮线,也就是熟知的心脏线.若取  $k_2 / k_1$  为别的一些值,将得到其分支数与转速比相应的别的圆外旋轮线.

当两转速相等即  $\varphi_1 = \varphi_2$  时,由式(1)可直接得到此时的合成图形仍是一个圆但半径

<sup>①</sup> (苏) H. A. 维尔钦科, II. II. 利亚什科, K. II. 什维佐夫著, 董笑咏, 王玉德, 杨利国译. 函数图象手册. 内蒙古民族师范学院数学系, 1981. 186~193

为  $a_1 + a_2$ . 因而, 同向图形的最简单情况就是圆.

根据上述推论可得, 同向图形的玫瑰线的瓣数、圆外旋轮线的分支数等于两转速的互质整数比项的差  $|k_1 - k_2|$ . 图形的共同特点是, 曲线的每个分支均向内弯, 整个图形花样似是“含苞欲放”.

2.2 反向图形 两扫描圆旋转方向相反, 用  $-\varphi_2$  代替  $\varphi_2$ , 其他条件相同, 经推演类似有

(1)  $a_1 = a_2 = a$ . 由式 (2) (3) 经化简后可得

$$\rho = 2a \cos \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \theta \quad (9)$$

这同样为玫瑰线的函数方程式, 选择各种转速比代入可得到一系列玫瑰线.

如:  $3:1$ ,  $\rho = 2a \cos 2\theta$ , 4 瓣玫瑰;  $3:2$ ,  $\rho = 2a \cos 5\theta$ , 5 瓣玫瑰;  $5:1$ ,  $\rho = 2a \cos (3\theta/2)$ , 6 瓣玫瑰.

(2)  $a_1 \neq a_2$ . 在反向条件下由式 (8) 得到的函数图象将是各种圆内旋轮线. 如  $k_2 : k_1 = 3:1$ , 代入后即可化简得

$$x = 4a \cos^3 \varphi, \quad y = 4a \sin^3 \varphi$$

这是动圆半径为不动圆半径的  $1/4$  亦即有 4 个分支的圆内旋轮线, 也就是星形线. 同样, 若选择转速比值为其他值, 则可得到相应分支数的别的圆内旋轮线.

当两转速相等时, 根据式 (1), 在  $a_1 \neq a_2$  时可得到反向图形的最简单情况——椭圆; 而当  $a_1 = a_2$  时, 则退化为一线棒.

反向图形玫瑰线的瓣数、圆内旋轮线的分支数等于两转速的互质整数比项的和  $k_1 + k_2$ . 反向图形的特点是曲线的每个分支向外弯, 图形的花样似是“花儿正开”.

一定分支数的玫瑰线或旋轮线对应的比值  $k_1/k_2$  为整数或分数. 由此可得, 只要比值不为无理数, 就可形成有限个分支的玫瑰线旋轮线.

### 3 构图的限制与增加图象效果的途径

由上述可得, 为构得更多的图形, 就需要增加两比项的值, 使两比项有更多的组合. 但是我们将看到, 这种增加是有限的.

首先, 随着  $k_1, k_2$  值的增加, 扫描图形一次走过的路程即角位移变大. 因为, 形成最简单的圆或椭圆,  $k_1 : k_2 = 1 : 1$ , 扫描图形一次两转镜的角位移  $\varphi_{1m}$  和  $\varphi_{2m}$  为  $2\pi$ , 那么, 对一般图形的  $\varphi_{1m}$  和  $\varphi_{2m}$  就分别为  $2k_1\pi$  和  $2k_2\pi$ . 因此, 在一定的角速度  $\omega_1$  和  $\omega_2$  情况下, 单位时间内重复扫描图形的次数即图形扫描频率为 (设  $k_1 > k_2$ , 以  $\varphi_{1m}$  为例)

$$f_m = \omega_1 / \varphi_{1m} = (2\pi\nu_1) / (2k_1\pi) = \nu_1 / k_1, \quad \nu_1 = f_m k_1 \quad (10)$$

可见,  $k_1$  的增加, 图形的扫描频率  $f_m$  要下降. 人的视觉闪烁频数为 20 Hz, 为了使屏幕上显示的图形连续均匀不闪烁,  $f_m$  不应小于 20. 因此, 为了保持  $f_m$  一定, 随着  $k_1$  的增加, 就要求转镜在更高的转速下运行, 这将受到驱动机构如电机的有限转速的限制. 例如, 构造  $k_1 : k_2 = 8 : 3$  的同向反向图形, 取  $f_m$  的低限, 计得  $\nu_1 = 160$  r/s, 这对一般微型直流电机来说已不低了, 如果这是它的上限, 那么要构造  $k_1$  值更大的图形, 其  $f_m$  必然要下降. 其次, 由于有更多的比项组合可选择, 使得其中部分图形是由  $k_1$  与  $k_2$  有较大差值构得的, 这将使得相应的两转速差值  $\Delta\nu$  亦较大. 因为

$$\nu_2 = (k_2/k_1) \nu_1, \quad \Delta\nu = \nu_1 - \frac{k_2}{k_1} \nu_1 = \nu_1 \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) \quad (11)$$

可见, 在  $\nu_1$  一定的情况下, 由于  $k_1$  相对  $k_2$  较大, 相应  $k_2$  的转镜应可在更低的速度下运行, 调速范围更宽. 这是构得更多图形的又一个限制.

由此看来, 两转镜扫描投射系统, 因电机转速的上下限的限制, 由改变转镜的转速比来构得更多的图形是很有限的.

虽然如此, 但我们可通过增加 LP 的图形生动性多样性, 以提高总的图象效果. 首先, 在不添加光学元件的基础上, 只是轻微改变两转速比来使原来的图形为动态. 这种改变相当于两转速间有一随时间而变的相位差  $\pm\Delta\varphi$ . 由式 (2) 得

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \Delta\varphi)} \quad (12)$$

可见, 如果让坐标系统作  $\pm\Delta\varphi$  的同步旋转, 原图形相对旋转的坐标系不动. 因而, 微调转速的结果是图形向左或向右旋转. 但若原图为圆, 由于  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 半径变为

$$R = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta\varphi} \quad (13)$$

原大小一定的圆变为半径从  $a_1 + a_2$  到  $|a_1 - a_2|$  随时间来回改变的“伸缩圆”.

若在原两转镜投射系统中再排列两个转镜, 让光束先后经四次反射后才投射到屏幕上, 那么可通过交叉配对组成不同的二转镜、三转镜直至四转镜投射系统. 系统总的图象效果要比两转镜投射系统, 有更多的大小和形状的变化. 若在原两转镜系统光路中的适当位置安放一维或多维衍射光栅, 那么, 原为单个的图形将变为按衍射级数分布的阵列图形. 此外, 还可添加别的元件来提高系统总的光学效果. 这将更充分体现出 LP 是科技和艺术的结晶.

梁振斌老师对本文写作提供参考资料, 对初稿亦提了有益的建议, 特此致谢.

## 参 考 文 献

- 1 Johnson R F, Priori A. *Electro - Optics*. February, 1983. 24~33
- 2 沈永欢, 梁在中, 许履瑚等. *实用数学手册*. 北京: 科学出版社, 1992. 77~78

# Researches on the Principles and Properties of the Two Rotating Mirrors Scanning Laser Projectors

Zou Shuwen\* Huang Guanggui Xu Haizhou

**Abstract** In the paper, the principles and properties of two rotating mirrors scanning laser projector are described. The produced functional images, producing conditions, limits to constituting figures and methods of increasing image effects are discussed.

**Keywords** circular scan, rotation - speed ratio, functional image, flicker frequency

\* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275