第34卷 第2期
1995年 4月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 2
Apr. 1995

Hamilton 偶图的局部度数条件

娄定俊
(中山大学计算机科学系，广州 510275)

摘 要 设 G 是具有二分类（X，Y）的2连通等部偶图．如果对 G 中每一个顶点 v，H 是 G 中与 v 距离为2和3的所有顶点导出的子图，并且对于 G 中每一个与 v 距离为3的顶点 u，u 在 H 中的度数 $d_H(u)$ 不小于距离 v 为2的顶点的数目减去（$d_G(v)-2$），则 G 是 Hamilton 图．其中 d_H（u）的下界不能改进．

关键词 局部条件，偶图，Hamilton 图

分类号 O157.5

本文中讨论的图都是有限、无向和简单的．图 G 称为泛圈的，是说对于每一个整数 n，$3\leqslant n\leqslant \nu(G)$，$G$ 中有长为 n 的圈．一个偶图 $G=$（X，Y）称为等部偶图，是说 $|X|=|Y|$．

设 C 是图 G 中的一个圈．我们给 C 设定一个方向．设 x 是 C 上的一个顶点，用 $x^+(C)$ 表示 C 上在 C 的方向上 x 的后继顶点．令 $x^{+1}(C)=x^+(C)$，$x^{+K}(C)=(x^{+(K-1)}(C))^+(C)$ $(k\geqslant 2)$．用 $x^-(C)$ 表示 C 上在 C 的方向上 x 的前趋顶点．令 $x^{-1}(C)=x^-(C)$，$x^{-k}(C)=(x^{-(k-1)}(C))^-(C)$．在不引起混淆的情况下，用 x^{+k} 表示 $x^{+k}(C)$，并用 x^{-k} 表示 $x^{-k}(C)$．设 $v\in V(G)\setminus V(C)$，定义 $Nc(v)=N(v)\cap V(C)$．并定义 $N_c^{+k}(v)=\{x^{+k}(C)\mid x\in Nc(v)\}$ 和 $N_c^{-k}(v)=\{x^{-k}(C)\mid x\in Nc(v)\}$．设 x 和 y 是 C 上两个不同的顶点．我们用 $C^+[x,y]$ 表示按照 C 的方向 C 上从 x 到 y 的路径，用 $C^-[x,y]$ 表示按照 C 的逆方向 C 上从 x 到 y 的路径．设 v 是 G 中一个顶点，定义 $N_k(v)=\{x\mid x\in V(G)$ 且 $d(v,x)=k\}$．设 G 和 H 是两个图，满足：$E(G)\cap E(H)=\varnothing$．用 $G+H$ 表示这样的图，它的顶点集是 $V(G)\cup V(H)$，边集是 $E(G)\cup E(H)$．

所有本文未定义的术语和符号均引自〔1〕．

Hasratian 和 Khachatrian 建立了 Hamilton 图的第一个局部条件[2]．自文〔2〕发表后，若干学者在 Hamilton 图的局部条件方面做了不少工作．施容华在这方面得到了一批成果[3,4]，他在〔4〕中，引入了 Hamilton 图的散度条件，该条件几乎可以蕴含现有的所有 Hamilton 图的局部条件．Aldred，Holton，娄定俊和施容华[5]最近证明了，在散度条件下，一个图或者是泛圈的，或者是 $K_{n,n}$．显然，现在的 Hamilton 图的局部条件都不适

收稿日期：1994-04-05

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

合描述 Hamilton 偶图. 本文将给出一个 Hamilton 偶图的局部条件，并举出反例，说明该条件已是最强的.

定理 1　设 $G=(X,Y)$ 是一个 2 连通等部偶图. 若对 G 中任意顶点 v，$H=G[N_2(v)\cup N_3(v)]$ 且对任意顶点 $u\in N_3(v)$，$d_H(u)\geqslant|N_2(v)|-d_G(v)+2$，则 G 是 Hamilton 图.

证明　设 $G=(X,Y)$ 是满足本定理条件的 2 连通等部偶图. 假设 G 不是 Hamilton 图. 设 $C=a_0b_0a_1b_1\cdots a_mb_ma_0$ 是 G 中的最长圈，其中 $a_i\in X,b_i\in Y(i=0,1,\cdots,m)$. 我们给 C 设定一个方向，使得 $a_i^+=b_i(i=0,1,\cdots,m)$. 分以下两个情形讨论.

情形 1　$G-V(C)$ 中存在一个顶点数不小于 2 的分支.

选取 C 使得 $G-V(C)$ 中顶点数不小于 2 的最小分支的顶点数最少. 设 R 是一个顶点数不小于 2 的最小分支. 设 $u,v\in V(R)$，满足 $N_c(v)\neq\varnothing$ 且 $uv\in E(G)$. 令 $N_R(v)=N(v)\cap V(R)$ 且 $N_R(u)=N(u)\cap V(R)$.

(i) $N_C(u)\neq\varnothing$.

设 $N_c(v)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，$N_R(v)\backslash\{u\}=\{v'_1,v'_2,\cdots,v'_g\}$. 再设 $N_C(u)=\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$，$N_R(u)\backslash\{v\}=\{u'_1,u'_2,\cdots,u'_s\}$. 由于 G 的围长不小于 4 且 G 不含奇圈，$\{u'_1,u'_2,\cdots,u'_s\}\cap\{v'_1,v'_2,\cdots,v'_g\}=\varnothing$ 且 $(N_c^C(v)\cup N_C^{-2}(v))\cap N_C(u)=\varnothing$. 又由于 C 是最长圈，$(N_C^-(v)\cup N_C^-(v))\cap N_C(u)=\varnothing$. 若不然，设 $v_i^+\in N_c^+(v)\cap N_c(u)$，则 $c'=c^+[v_i^+,v_i]+v_ivuv_i^+$ 是 G 中比 C 长的圈，这与 C 的假设矛盾. 同理，可由 $N_c^-(v)\cap N_c(u)\neq\varnothing$ 导出矛盾.

若存在某个 $u_j^-\in N_c^+(u)$ 使得 $v_1^-u_j^+\in E(G)$，则 $C'=C^+[u_j^+,v_1]+v_1vuu_j+C^-[u_j,v_1^+]+v_1^+u_j^+$ 是 G 中比 C 长的圈，这与 C 的假设矛盾. 若 v_1^+ 与 $N_R(v)$ 中的顶点相邻，则 G 中有比 C 长的圈，矛盾. 故 v_1^+ 与 $N_C^+(u)\cup(N_R(v)\backslash\{u\})$ 中任何顶点都不相邻. 但 $N_C^+(u)\cup(N_R(v)\backslash\{u\})\subseteq N_2(u)$. 注意到 $v_1^+\in N_3(u)$. 由本定理的条件知，v_1^+ 至多与 $d(u)-2$ 个 $N_2(u)$ 中的顶点不相邻. 故

$$|N_C^+(u)\cup(N_R(v)\backslash\{u\})|\leqslant d(u)-2 \tag{1}$$

同理，u_1^+ 与 $N_C^+(v)\cup(N_R(u)\backslash\{v\})$ 中任何顶点都不相邻，

并且

$$|N_C^+(v)\cup(N_R(u)\backslash\{v\})|\leqslant d(v)-2 \tag{2}$$

由(1)、(2)式

$$\begin{aligned}&|N_c^+(u)\cup(N_R(v)\backslash\{u\})|+|N_c^+(v)\cup(N_R(u)\backslash\{v\})|\\&=|N_C^+(u)|+|N_R(v)\backslash\{u\}|+|N_C^+(v)|+|N_R(u)\backslash\{v\}\\&=|N_C(u)|+N_R(u)\backslash\{v\}|+|N_C(v)|+|N_R(v)\backslash\{u\}|\\&=|N(u)\backslash\{v\}|+|N(v)\backslash\{u\}|\\&=(d(v)-1)+(d(r)-1)\\&\leqslant(d(u)-2)+(d(v)-2)，矛盾.\end{aligned}$$

(ii) 对任意 $u\in N(v)\backslash V(c)$，$N_c(u)=\varnothing$.

若存在某个 $v_i\in N_C(v)$ 使得 $v_i^{+2}\notin N_C(v)$. 那么，$v_i^{+2}\in N_3(v)$. 注意 v_i^+，v_i^{+2} 不与 R 中任何顶点相邻，否则 G 中有比 C 长的圈.

若存在某个 $v_j\in N_C(v)(j\neq i)$，有 $v_i^{+2}v_j^+\in E(G)$，那么用 $C'=C^+[v_i^{+2},v_j]+v_jvv_i+C^-[v_i,v_j^+]+v_j^+v_i^{+2}$ 代替 C. 这时有 $|V(C)|=|V(C')|$. 但 $G-V(C')$ 中含有一个分支 R'

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

使得 $V(R')\subseteq V(R)$ 且 $2\leqslant|V(R')|<|V(R)|$，这与 C 的选择矛盾.

故 v_i^{+2} 不与任何 $N_c^+(v)\backslash\{v_i^+\}$ 中顶点相邻. 令 $S=\bigcup_{u\in N(v)\backslash v(c)}(N(u)\backslash\{v\})$. 则 $S\subseteq N_2(v)$. 若 v_i^{+2} 与 S 中的顶点相邻，则 G 中有一个比 C 长的圈，矛盾. 故 v_i^{+2} 与 S 中任何顶点都不相邻. 由本定理的条件，v_i^{+2} 至多与 $N_2(v)$ 中 $d(v)-2$ 个顶点不相邻.

故 $$|(N_c^+(v)\backslash\{v_i^+\})\cup S|\leqslant d(v)-2.$$

从而

$$|S|\leqslant(d(v)-2)-|N_c^+(v)\backslash\{v_i^+\}|=(d(v)-2)-|N_c(v)\backslash\{v_i\}|$$
$$=d(v)-2-(|N_c(v)|-1)=d(v)-|N_c(v)|-1 \qquad (3)$$

设 u 是 $N_R(v)$ 中的一个顶点. 这时有 $v_i^+\in N_3(u)$. 则 v_i^+ 与 $N_R(v)\backslash\{u\}$ 中任一顶点不相邻，否则 G 中有比 C 长的圈，矛盾. 但 $N_R(v)\backslash\{u\}\subseteq N_2(u)$. 由本定理的条件，$v_i^+$ 至多与 $N_2(u)$ 中 $d(u)-2$ 个顶点不相邻. 所以

$$|N_R(v)\backslash\{u\}|\leqslant d(u)-2\leqslant(|S|+1)-2$$
$$\leqslant(d(v)-|N_c(v)|-1)+1-2=|N_R(v)\backslash\{u\}|-1,\text{矛盾}.$$

现在设对于任何 $v_i\in N_c(v)$，$v_i^{+2}\in N_c(v)$. 不失一般性，设 $v\in X$，则 $N_c(v)=\{b_0,b_1,\cdots,b_m\}$. 由于 G 是 2 连通的，故 R 中存在长至少为 3 的路 P 连接 v 和 C 上某个 a_i 或 b_i. 那么 $b_{i-1}v+P$ 和 $C^+[a_i,b_{i-1}]$ 或 $C^+[b_i,b_{i-1}]$ 构成比 C 长的圈，矛盾.

情形 2 设 $G-V(C)$ 中所有分支为孤立点.

设 x 是 $G-V(C)$ 的一个孤立点. 不失一般性，设 $x\in X$. 由于 G 是等部偶图，故 $G-V(C)$ 中存在另一个孤立点 y，$y\in Y$. 我们选取 C 使得 $N_C(x)$ 中一个顶点与 $N_C(y)$ 中一个顶点在 C 上距离最近.

若 C 上与 x 相邻的点 x_1 和 C 上与 y 相邻的点 y_1 距离为 1，即 $x_1^+=y_1$. 则 $y\in N_3(x)$. 注意 $N_C(x)=N(x)$ 且 $N_C^+(x)\subseteq N_2(x)$. 由本定理的条件，y 至多与 $N_c^-(x)$ 中 $d(x)-2=|N_c^+(x)|-2$ 个顶点不相邻. 故存在某个 $x_2\in N_C(x)$，使得 $yx_2^-\in E(G)$ 并且 $x_2\neq x_1$. 从而 $C'=C^+[y_1,x_2]+x_2xx_1+C^-[x_1,x_2^+]+x_2^+yy_1$ 为 G 中比 C 长的圈，矛盾.

设 x_1 与 y_1 是 $N_c(x)$ 与 $N_c(y)$ 在 C 上的距离最近的顶点，但 x_1 与 y_1 在 C 上距离大于 1. 不妨设 $C^+[x_1,y_1]$ 是 C 上连接 x_1 和 y_1 的最短路径. 由于 $x\in X$ 且 $y\in Y$，$x_1^{+2}\notin N_C(y)$. 由于 $x_1^{+2}\in N_3(x)$ 且 x_1^{+2} 至多与 $N_c^+(x)\subseteq N_2(x)$ 中 $d(x)-2$ 个顶点不相邻. 故存在 $x_2\in N_c(x)$，$x_2\neq x_1$ 且 $x_1^{+2}x_2^+\in E(G)$. 现在用 $C'=C^+[x_1^{+2},x_2]+x_2xx_1+C^-[x_1,x_2^+]+x_2^-x_1^{-2}$ 代替 C 并且 $x_1^+(C)$ 代替 x. 则 $x_1^{+2}(C)\in N_C(x^+(C))$. 它在 C' 上与 y_1 的距离比在 C 上 x_1 与 y_1 的距离近. 这与 C 的选择矛盾. 定理得证.

以下我们给出一个反例，说明定理 1 中 $d_H(u)$ 的下界不能改进. 令

$$S_i=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im}\}(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant4\text{ 且 }m\geqslant2).$$

作图 G 使得 $V(G)=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ 且 $E(G)=\{a_{ij}a_{(i+1)k}|i=1,2,\cdots,n-1,1\leqslant j,k\leqslant m\}$. 则 G 中任一顶点 u 满足：$d_H(u)\geqslant|N_2(v)|-d_G(v)+1$，其中 u,v,G 和 H 如定理 1 中所述，但 G 不是 Hamilton 图. 这是因为删除 S_2 中的所有顶点，$G-S_2$ 有 $|S_2|+1$ 个分支. 故定理 1 中 $d_H(u)$ 的下界不能改进.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications, Macmillan Press, London. 1976

2 Hasratian A S, Khachatrian N K. Some localization theorems on hamiltonian circuits, J Combin. Theory 1990,B49:287～294

3 Shi Ronghua. 2 - Neighborhoods and hamiltonian conditions, J Graph Theory, 1992,16:267～271

4 Shi Ronghua. Divergence and hamiltonian conditions, 1991

5 Aldred R E L, Holton D A, Lou Dingjun, Shi Ronghua. Divergence condition for pancyclicity, 1992

A Local Degree Condition for Hamiltonian Bipartite Graphs

Lou Dingjun *

Abstract Let G be a balanced 2 - connected bipartite graph with bipartlition (X,Y). Suppose for each vertex v of G, H is the subgraph induced by the vertices which are distance 2 or 3 from v, and for each vertex u which has distance 3 to v, the degree $d_H(u)$ of u in H is at least the numbor of the vertices distance 2 from v minus $(d_G(v)-2)$. Then G is Hamiltonian, where the lower bound of $d_H(u)$ is sharp.

Keywords local condition, bipartite graph, Hamilton graph

* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net