

正 p 函数的 Delphic 半群结构*

何远江

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘要 本文证明了正 p 函数半群 \mathcal{K}^+ 是一 Delphic 半群, 并且证明了 p 函数半群 \mathcal{K} 具有性质 ILID (an infinitesimal limit is infinitely divisible), 即若正 p 函数 $p(t)$ 是 \mathcal{K} 中某一无穷小三角阵的极限, 则 $p(t)$ 是无穷可分的.

关键词 p 函数, Delphic 半群, 性质 ILID.

分类号 O221.61, O152.7

p 函数的理论是与 Markov 过程和再生现象紧密联系的^[1]. 根据 [1] 定理 2.1, 我们有下面的等价定义.

定义 1 称定义在 $(0, \infty)$ 上的函数 p 为 p 函数, 若对每一自然数 m 和 $0 < t_1 < \dots < t_m$, 下面的两个不等式成立

$$F(t_1, \dots, t_m; p) \geq 0, \\ \sum_{1 \leq k \leq m} F(t_1, \dots, t_k; p) \leq 1,$$

其中

$$F(t_1, \dots, t_k; p) := p(t_k) - \sum_{1 \leq i < k} p(t_i)p(t_k - t_i) + \sum_{1 \leq i < j < k} p(t_i)p(t_j - t_i)p(t_k - t_j) \\ - \dots + (-1)^{k-1} p(t_1)p(t_2 - t_1)\dots p(t_k - t_{k-1}).$$

p 函数的基本性质是众所周知的, 而读者们可以参考 [1, 2, 3].

称一个 p 函数 p 是标准的, 若 $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = 1$. 分别以 $\mathcal{K}, \mathcal{K}^+, \mathcal{D}$ 记 p 函数集, 正 p 函数集, 标准 p 函数集. 如果对任意的 $p_1, p_2 \in \mathcal{K}$, 它们的乘积 p 由 $p(t) := p_1(t)p_2(t)$ 对 $t > 0$ 定义, 则 \mathcal{K} 是一个 Abel 半群. 如果又赋予 \mathcal{K} 点式拓扑, 则根据 [3] 定理 1 的推论, \mathcal{K} 是一个紧的 Hausdorff 拓扑半群. 显然 \mathcal{K}^+ 是 \mathcal{K} 的一个子半群. 根据 [1] 定理 2.3, \mathcal{D} 是 \mathcal{K}^+ 的一个子半群.

Kendall^[2] 定义了 Delphic 半群, 研究了它们的性质, 并且证明了 \mathcal{D} 是一 Delphic 半群. 本文将要证明 \mathcal{K} 具有性质 ILID (an infinitesimal limit is infinitely divisible, 参看 [4])

收稿日期: 1993-04-08

* 国家自然科学基金与高等学校博士学科点专项科研基金部分资助项目

定理 3.1(f)), 并且要证明 \mathcal{X}^+ 也是一 Delphic 半群.

引理 1 如果 $\{p_r \in \mathcal{X} : 1 \leq r \leq s < \infty\}$ 是 \mathcal{X} 中的阵列, 对所有的 t 都有 $\lim_{r \rightarrow \infty} \min p_r(t) = 1$ 和 $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{r_1}(t) \cdots p_{r_r}(t) = p(t) > 0$, 则 p 是无穷可分的, 即对每一自然数 n 都有 $p_n \in \mathcal{X}$ 使得 $p_n^n = p$.

证明 设 n, m 是任意固定的自然数而 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$. 对 $0 \leq i < j \leq m$, 设同态变换 $D_{ij}: \mathcal{X} \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}_+, +)$ 由 $D_{ij}(q) = -\log q(t_j - t_i)$ 定义, 其中 $(\bar{\mathbb{R}}_+, +)$ 是非负的扩充了的实数的加半群. 由于 \mathcal{X} 是紧的, \mathcal{X} 是关于网稳定的 (参看 [4] 定义 3.1(b)). 根据 [4] 定理 3.6, 存在 $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{X}$ 使得 $p = q_1 \cdots q_n$ 且对每一 i, j 都有 $D_{ij}(q_1) = \cdots = D_{ij}(q_n)$. 所以对每一 i, j 有 $(p(t_j - t_i))^{\frac{1}{n}} = q_1(t_j - t_i)$. 由于 $q_1 \in \mathcal{X}$, 我们有

$$F(t_1, \dots, t_m; p^{\frac{1}{n}}) = F(t_1, \dots, t_m; q_1) \geq 0,$$

$$\sum_{1 \leq k \leq m} F(t_1, \dots, t_k; p^{\frac{1}{n}}) = \sum_{1 \leq k \leq m} F(t_1, \dots, t_k; q_1) \leq 1.$$

所以 $p^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{X}$ 且 p 是无穷可分的. 证毕.

定理 1 如果 $\{p_r \in \mathcal{X} : 1 \leq r \leq s < \infty\}$ 是 \mathcal{X} 中的阵列, 对所有的 t 都有 $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{r_1}(t) \cdots p_{r_r}(t) > 0$, 对某一 t_0 有 $\lim_{r \rightarrow \infty} \min p_r(t_0) = 1$, 则 p 是无穷可分的.

证明 根据 [2] 的 2.1 节, 对所有 t 有 $\lim_{r \rightarrow \infty} \min p_r(t) = 1$, 所以根据引理 1, p 是无穷可分的. 证毕.

定义 2 设 S 是一 Hausdorff 拓扑半群且有单位元 (identity element) e . 如果以下的条件满足, 我们就称 $(S; D)$ 或 S 是一 Delphic 半群.

- (i) 对每一个 $s \in S$, s 的因子集 $T_s = \{t \in S : \text{存在 } v \in S \text{ 使得 } s = tv\}$ 是紧的.
- (ii) D 是从 S 到非负实数加半群 $(\mathbb{R}_+, +)$ 上的连续同态变换.
- (iii) 设 $s \in S$, 则 $D(s) = 0$ 仅当 $s = e$.
- (iv) 设 $\{s_{ij} \in S : 1 \leq i \leq j < \infty\}$ 是 S 中的阵列. 如果 $\lim_{i \rightarrow \infty} \min_j D(S_{ij}) = 0$ 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{i1} \cdots s_{ii} = s$, 则 s 是无穷可分的.

定理 2 半群 \mathcal{X}^+ 是一 Delphic 半群

证明 设 $p \in \mathcal{X}^+$ 且 (g_n) 是 T_p 中的网, 则存在 T_p 中的网 (h_n) 使得对每一 n 有 $g_n h_n = p$. 因为 \mathcal{X} 是紧的, 所以存在网 (g_n, h_n) 的子网收敛于 $(g, h) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. 因此 $gh = p$ 且 $g, h \in \mathcal{X}^+$. 由此知 T_p 是紧的. 对任意固定的 $t_0 > 0$, 设 $D: \mathcal{X}^+ \rightarrow (\mathbb{R}_+, +)$ 由 $D(p) = -\log p(t_0)$ 定义, 则 D 是一连续同态变换. 根据 [2] 的 2.1 节知 $D(p) = 0$ 当且仅当对所有 $t, p(t) = 1$. 根据定理 1 知定义 2 中的 (iv) 也满足, 所以 \mathcal{X}^+ 是一 Delphic 半群. 证毕.

注 (1) 设 $p(t)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的正函数, 黄之瑞^[5] 证明了:

① $p(t) \in \mathcal{X}^+$ 且 $p(t)$ 是无穷可分的当且仅当 $p(t)$ 是有界的且对每一 $s > 0, t_2 > t_1 > 0$ 有 $p(s) \leq p(t_1 + s)/p(t_1) \leq p(t_2 + s)/p(t_2)$.

② $p(t) \in \mathcal{X}$ 且 $p(t)$ 的所有因子都是无穷可分的当且仅当存在 $a \in (0, 1]$ 和 $c \geq 0$ 使得对每一 t 都有 $p(t) = ae^{-ct}$.

(2) Kingman^[6] 证明了每一可测正 p 函数 $p(t)$ 都能写成 $p(t) = ap_0(t)$, 其中 $a \in (0, 1]$, 而 $p_0(t)$ 是一标准 p 函数. 并且他有一猜想“没有非可测的正 p 函数”.

(3) 从[7]定理 2.10.7 也可以推导得引理 1.

参 考 文 献

- 1 Kingman J F C. Regenerative Phenomena. London, wiley, 1972
- 2 Kendall D G. Delphic semigroups, infinitely divisible regenerative phenomena, and the arithmetic of p -functions. *Z Wahrsh Verw*, 1968, 9: 163~195
- 3 Kingman J F C. The stochastic theory of regenerative events. *Z Wahrsh Verw*, 1964, 2: 180~224
- 4 He Yuanjiang. Central limit properties of GZH-semigroups and their applications in probability theory. *Ann Probab*, 1993, 21 (1): 185~201
- 5 Huang Zhirui. The structure of the calass of infinitely divisible positive p -functions. *Chinese J Appl Probab Statist*, 1992, 8 (1): 70~74
- 6 Kingman J F C. On measurable p -functions. *Z Wahrsh Verw*, 1968, 11: 1~8
- 7 Ruzsa, I Z, Székely G J. Algebraic Probability Theory. New York, Wiley, 1988

The Delphic Semigroup Structure of Positive p -functions

He Yuanjiang *

Abstract We prove that the semigroup \mathcal{X}^+ of positive p -functions is a Delphic semigroup, and that the semigroup \mathcal{X} of p -functions has property ILID (an infinitesimal limit is infinitely divisible), that is, if $\{p_r \in \mathcal{X}; 1 \leq r \leq s < \infty\}$ is an array in \mathcal{X} , $\lim_{r \rightarrow \infty} p_r(t) \cdots p_r(t) = p(t) > 0$ for all t and $\lim_{r \rightarrow \infty} \min_{s \leq t} p_r(t_0) = 1$ for some $t_0 > 0$, then p is infinitely divisible.

Keywords p -function, Delphic semigroup, property ILID

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275