第34卷 第1期
1995年 1月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 1
Jan. 1995

一阶非线性分布参数系统的惯性流形与滑动模控制*

赵志晖 刘明扬
(中山大学数学系，广州 510275)

摘 要 给出一阶非线性分布参数系统的有限维惯性流形的存在性条件，得到了系统的滑动模方程式，并且讨论了通过取有限维反馈控制，得到系统全局稳定性的条件，最后运用所得到的结果解决一个工程上的热加工控制问题．

关键词 惯性流形，全局吸引子，滑动模方程，热加工
分类号 O175.29，O231

集中参数系统的变结构理论和方法；由于其具有对干扰的鲁棒性、能分解性及算法简单等特点，在近几十年来已逐步形成了系统的和比较完善的研究框架，并在电机和机器人等复杂系统中有广泛的应用前景（见［1］及其参考文献）．然而，许多现代工程的控制问题，如弹性振动系统的控制（例如柔性机器人、空间飞行器等）及温度场的控制（如热处理系统等）都是以偏微分方程来描述其状态变化规律的，因此，近年来，分布参数系统的变结构控制理论与方法的研究越来越得到人们的重视[2,3]，但是，迄今为止，所发表的文章基本上是应用集中参数系统所采用的传统方法作平推性的研究，其缺点是：①没有充分考虑分布参数系统的特点，例如，一阶分布参数系统的散逸性，二阶分布参数系统的半群的非解析性等；②在建立关键性的基本定理时，作了难以验证的假设，而这些假设往往正是分布参数系统复杂性所引起的需要证明的难点所在；③所得的结果难以在工程中实现．

针对以上问题，本文应用无穷维动力系统理论，把一阶非线性分布参数系统的惯性流形满足的方程作为滑动模方程，由于惯性流形是有限维的，这样就大大地改进了现有的结果，并使控制可取为有限维形式，而所需的条件也明显地减弱，并易于验证．

1 系统描述及惯性流形

考虑如下一阶非线性分布参数控制系统

收稿日期：1993-10-06
*国家自然科学基金及博士点专项基金的资助项目

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t+Ax(t)+F(x(t))=u(t) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

设 $H=L^2(\Omega)$，$V\subset H\subset V^*$，V，H，V^* 的范分别用 $\|\cdot\|$，$|\cdot|$，$\|\cdot\|^*$ 表示，算子 A：$V\to V^*$ 定义为

$$\langle Ax,y\rangle=a(x,y),\quad \forall\ x,y\in V$$

其中 $a(x,y)$ 为 $V\times V$ 上对称、连续及强制的双线性型

$$\begin{aligned} &a(x,y)\leqslant a\|x\|\cdot\|y\| \quad \forall\ x,y\in V \\ &a(x,y)\geqslant\omega\|x\|^2 \quad \forall\ x\in V \end{aligned} \tag{2}$$

设 $D(A)=\{x\in V: Ax\in H\}$，则 A 是 H 上的无界定正自共轭算子，且 A^{-1} 是紧的．设

$$A\omega_j=\lambda_j\omega_j,\quad j=1,2,\cdots$$

其中，ω_j 是 A 对应于特征值 λ_j 的特征函数，$\{\omega_j\}$ 形成 H 中的正交基，及

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots\to+\infty\quad 当\ j\to+\infty$$

现作如下假设：

(H_1)：$F(x)=F_1(x)+F_2(x)$，$(F(0)=0)$ 是定义在 $D(F)\subset H$ 上，且是局部 Lipschitz 的，F_1 是 H 上的极大单调算子，且 $\mathrm{int}\ D(F)\cap D(A)\neq\Phi$，$F_2$ 是 H 上的一致 Lipschitz 映射，或者是局部 Lipschitz 映射且一致有界．

并具体假设：

$$\begin{aligned} &\langle F(x),\ x\rangle\geqslant a_1|x|^2-a_2 \quad \forall\ x\in H \\ &\langle F(x_1)-F(x_2),x_1-x_2\rangle\geqslant a_3|x_1-x_2|^2,\quad \forall\ x_1,x_2\in H \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $a_1\geqslant0$，a_2 和 a_3 是给定实数．

在以下的假设下，关于(3)有如下的解的存在唯一定理[4]．

定理1　1)如果 $x_0\in H$，$u\in L^2(0,T;H)$，则(1)有唯一解 $x\in C(0,T;H)\cap W^{1,2}(\delta,T;H)\cap L^2(0,T;V)$　$(\delta>0)$；

2)如果 $x_0\in V$，$u\in L^2(0,T;H)$，则(1)有唯一解 $x\in W^{1,2}(0,T;H)\cap C(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))$．

注1　由定理1知，(1)具有强连续非线性半群 $S(t)$：$x_0\to x(t)$．

注2　根据 (H_1)，可假定 F 满足如下的实质上比 (H_1) 更弱的条件．

$$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant C_M\|x_1-x_2\|.$$
$$\forall\ x_1,x_2\in V,\ \|x_1\|\leqslant M,\ \|x_2\|\leqslant M \tag{4}$$

定义1　E 称为是系统(1)在 H(或 V)中的全局吸引子是指 E 是 H(或 V)中的连通紧集及关于 $S(t)$ 是不变的，且吸引 H(或 V)中任一有界集．

下面我们将对 $V=D(A^{1/2})$ 的情况进行讨论，此时，$D(A)$ 紧嵌入于 V，关于系统(1)在 V 中的全局吸引子 E 的存在性有如下定理[4]．

定理2　在定理1之2)的假设下，并假定 $u\in L^\infty(0,\infty;H)$，则系统(1)在 V 中具有全局吸引子．

注3　在定理2的假设下，系统(1)在 V 中具有吸收集 $B(0,\rho)\subset V$，这里 $B(0,\rho)$ 表示 V 中以0元为球心，以 ρ 为半径的球，ρ 由下列式子给出：

$$\rho=(C'_0+C_0)/\omega \tag{5}$$

这里 $C'_0=\alpha C''_0$，$C''_0=2\alpha_2/\omega+(\lambda_1/\omega)C_1+\rho_1^2/\omega$，

$C_0=2C_1+C_2\rho_1^2$

其中

$C_1=\int_0^\infty |u(t)|^2\mathrm{d}t$；

ρ_1 为大于 $\rho_0=(2a_2\lambda_1+C_1\lambda_1)/\omega$ 的任一给定数；

C_2 为 F 的关于 ρ_0 的局部 Lipschiz 常数，a 及 a_2 分别如(2)及(3)所述．

定义 2 称 μ 是(1)在 V 中惯性流形，是指 μ 是 V 中的有限维 Lipschitz 流形且关于 $S(t)$是正不变的，并以 exp 指数率吸引从 V 中出发的任何轨道．

为了讨论惯性流形的存在性，假设 $P=P_N$ 是 H 到由$\{\omega_1\cdots\omega_N\}$展开的空间的投影，令 $Q=I-P$ 易知，P 和 Q 与 $A^v(v\in R)$是可交换的，注意到(4)，关于系统(1)在 V 中存在惯性流形的存在性有如下定理[5].

定理 3 在定理 2 的假设下，若存在正整数 N 使得 $\Lambda=\lambda_{N+1}$，$\lambda=\lambda_N$ 满足如下的 gap 条件：

$$\begin{aligned}&\Lambda>C_3^2((1+l)/l-4C_4+11)^{1/2}\\&\Lambda-\lambda>2C_3(1+l)(\lambda^{1/2}+\Lambda^{1/2})/l\end{aligned}\tag{6}$$

则(1)存在 N 维惯性流形，其中

$C_3=2M_1/\rho+C_2\rho$

这里 M_1 满足

$$\sup|F(x)|\leqslant M_1,\quad \forall\ \|x\|\leqslant 2\rho$$

ρ 如(5)所述，$C_{2\rho}$为(4)中的 C_M，当 $M=2\rho$ 时的值，l 及 C_4 如下面注中所述．

注 4 此时 $\mu=\mathrm{graph}(\varphi)$，其中 φ 是 $PV\to QV$ 的 Lipschitz 映射，且满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{Supp}\ \varphi\subset\{p\in PV:\|p\|\leqslant 2\rho\}\\&\|\varphi(p)\|\leqslant b\quad \forall\ p\in PV\\&\|\varphi(p_1)-\varphi(p_2)\|\leqslant l\|p_1-p_2\|,\quad \forall\ p_1,p_2\in PV\end{aligned}\tag{7}$$

其中,$l\in(0,1/8)$，b 为某给定数，(6)中的 $C_4=(b/M)\Lambda^{1/2}$

注 5[5] $|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant C_3\|x_1-x_2\|$，$\forall\ x_1,x_2\in B(0,2\rho)$

2 滑动模方程及其在反馈控制下的稳定性

取(1)中的控制函数 $u(t)$为有限维反馈形式，$u(t)=-\beta Px(t)$，其中 $\beta>0$ 为某个给定的实数，此时(1)为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t+Ax(t)+\beta Px(t)+F(x(t))=0\\x(0)=x_0\end{cases}\tag{8}$$

由于 $\bar{A}x(t)=Ax(t)+\beta Px(t)$仍满足上述关于 A 的假设(只不过(2)中的 α 变为 $\alpha+\beta$)，因此，由定理 1 及 2 有

定理 4 如果 $x_0\in V$ 则(8)有唯一解，$x\in W^{1,2}(0,T;H)\cap C(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))$，且在 V 中有全局吸引子．

注 6　此时(5)中的 ρ 具有 $C_1=0$.

由于 $\overline{A}$ 只改变 A 中前 N 个特征值，因此，由定理 3 可得到如下的定理．

定理 5　在定理 4 的假设下，如果

$$\Lambda>C_3^2((1+l)/l-4C_4+11)^{1/2}$$
$$\Lambda-\lambda>[\beta+2C_3(1+l)]((\lambda+\beta)^{1/2}+\Lambda^{1/2})/l \tag{9}$$

则(8)有 N 维惯性流形 $\mu_1=\mathrm{graph}(\varphi_1)$，其中 φ_1 满足(7).

(8)在 μ_1 上的解(即 $x_0\in\mu_1$)满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t+Ap(t)+\beta p(t)+PF(p(t)+\varphi_1(p(t)))=0 & (10a)\\ \mathrm{d}\varphi_1(p(t))/\mathrm{d}t+(A\varphi_1(p(t))+QF(p(t))+\varphi_1(p(t)))=0 & (10b)\\ P(0)=px_0,\ \varphi_1(p(0))=Qx_0 & (10c)\end{cases}$$

即为滑动模方程．

对(10a)，在 H 的内积下作用 $Ap(t)$ 及注意到注 5 和(7)可得到：

$$(1/2)\mathrm{d}|p(t)|^2/\mathrm{d}t+|Ap(t)|^2+\beta\|p(t)\|^2$$
$$\leqslant C_3(1+l)|p(t)|\cdot|Ap(t)| \tag{11}$$

其中 C_3 如(6)中所示．注意到 $l<1/8$，由(11)可得

$$(1/2)\mathrm{d}|P(t)|^2/\mathrm{d}t+\beta\|p(t)\|^2\leqslant 81C_3^2\|p(t)\|^2/256 \tag{12}$$

由(12)可得如下定理

定理 6　在定理 5 的假设下，如果可选取

$$\beta>81C_3^2/256 \tag{13}$$

则有 $p(t)\to 0$，当 $t\to+\infty$.

注 7　由锥性质[5]及定理 6 可知 $\varphi_1(p(t))\to 0$，当 $t\to+\infty$，故 μ_1 上的解皆趋于 0.

3　系统(8)的全局稳定性

下面将在定理 6 的假设下，讨论系统(8)的全局稳定性．

首先在 $B(0,2\rho)$ 中讨论，设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是(8)的具有初值 x_{10} 和 $x_{20}(\in B(0,\rho))$ 的两个解，令 $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ 及 $p(t)=Px(t)$，$q(t)=Qx(t)$，并定义锥 C 为

$$C=\{\zeta\in V:\|Q\zeta\|\leqslant 1/8\|P\zeta\|\}$$

注意到

$$|Aq|^2\geqslant\Lambda\|q\|^2\qquad\forall\ q\in QV$$
$$|Ap|^2\leqslant\lambda\|p\|^2\qquad\forall\ p\in PV$$

由(8)可得

$$(1/2)\mathrm{d}\|p(t)\|^2/\mathrm{d}t\geqslant-(\lambda+\beta+C_3\lambda^{1/2})\|p(t)\|^2-C_3\lambda^{1/2}\|p(t)\|\cdot\|q(t)\|$$

及

$$(1/2)\mathrm{d}\|q(t)\|^2/\mathrm{d}t\leqslant-|Aq(t)|^2+C_3(\|p(t)\|+\|q(t)\|)|Aq(t)| \tag{14}$$

当 $\|q(t)\|\geqslant 1/8\|p(t)\|$ 时．只要

$$|Aq(t)|\geqslant\Lambda^{1/2}\|q(t)\|\geqslant C_3(\|p(t)\|+\|q(t)\|)/2 \tag{15}$$

则(14)中右边的 $|Aq(t)|$ 可由 $\Lambda^{1/2}\|q(t)\|$ 所代替，而使(15)成立的一个充分条件是

$$1/8(\Lambda^{1/2}-C_3/2)\geqslant C_3/2 \tag{16}$$

而(16)由(9)的第一式所保证．综上所述，在锥 C 外面，有

$$(1/2)\mathrm{d}\|q(t)\|^2/\mathrm{d}t\leqslant-(\Lambda-C_3\Lambda^{1/2})\|q(t)\|^2+C_3\Lambda^{1/2}\|p(t)\|\cdot\|q(t)\|$$

此时，使锥性质[5]成立的条件是：

$$\Lambda-\lambda-\beta\geqslant C_3(1/8\lambda^{1/2}+8\Lambda^{1/2})+C_3\cdot(\lambda^{1/2}+\Lambda^{1/2})$$

而这由(9)的第二式所保证，同时锥性质中的 exp 指数

$$\upsilon=\Lambda-9C_3\Lambda^{1/2}>0$$

现考虑 $B(0,\rho)$ 中出发的解 $x(t)$，其初值为 $x_0\in B(0,\rho)$，由于 μ_1 是有限维的，故存在 $y_0\in\mu_1$ 上，使得：

$$\|x_0-y_0\|=\mathrm{dist}(x_0,\mu_1)=\inf\|x_0-w\|\quad w\in\mu_1 \tag{17}$$

由 y_0 出发的解 $y(t)$ 在 μ_1 上．

令 $W(t)=x(t)-y(t)$，现把锥性质应用于 $W(t)$.

由锥性质知道[5]：

(i) 若 $W(0)\in C$，则 $W(t)\in C\qquad\forall\ t>0$

(ii) 若 $W(0)\overline{\in}C$，则有两种可能的情况

① 对某个 $t_0>0$，$W(t_0)\in C$ 且有 $W(t)\in C\qquad\forall\ t\geqslant t_0$

② $W(t)\overline{\in}C\qquad\forall\ t\geqslant 0$

对情况(ii)②，由锥性质知道有

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\|&\leqslant 8(1+(1/8)^2)^{1/2}\|x_0-y_0\|\exp(-\upsilon t)\\&=(65)^{1/2}\|x_0-y_0\|\exp(-\upsilon t)\end{aligned} \tag{18}$$

对情况(1)，由(10)及(8)有

$$\mathrm{d}p(t)/\mathrm{d}t+Ap(t)+\beta p(t)+P(F(x(t))-F(y(t)))=0$$

其中 $p(t)=PW(t)$.

类似于(11)的推导可得：

$$\begin{aligned}&(1/2)d\|p(t)\|^2/\mathrm{d}t+|Ap(t)|^2+\beta\|p(t)\|^2\\&\leqslant C_3\|W(t)\|\cdot|Ap(t)|\leqslant C_3(1+1/8)\|p(t)\|\cdot|Ap(t)|\end{aligned}$$

因此，只要(13)成立，有 $\|p(t)\|=\|P(x(t)-y(t))\|\to 0$ 当 $t\to\infty$，且由(14)知：

$$\|QW(t)\|=\|Q(x(t)-y(t))\|\leqslant 1/8\|P(x(t)-y(t))\|\to 0\quad \text{当 } t\to+\infty \tag{19}$$

于是有 $\|W(t)\|=\|x(t)-y(t)\|\to 0$ 当 $t\to+\infty$

对情况(ii)①，只需对 $t\geqslant t_0$ 作类似于情况(i)的讨论便知(19)也成立．

由(18)及(19)可知：对 $B(0,\rho)$ 中出发的任一解 $x(t)$，当 $t\to+\infty$ 时，必在 V 中趋向于由(17)确定的初值 y_0 在 μ_1 上的解 $y(t)$. 而对于初值在 $B(0,\rho)$ 外的任一解 $x(t)$，由于 $B(0,\rho)$ 是吸收集，故一定在某个 t_0 之后进入 $B(0,\rho)$ 把此 t_0 作为初始时间，$x(t_0)$ 作为初值，则一样可得到结果．于是由定理6及注7我们有如下定理．

定理7 在定理6的假设下，(8)的任一从 $x_0\in V$ 的解 $x(t)$ 在有限维反馈控制下必沿着 μ_1 在 V 中趋向原点．

注8 上面是在 V 中讨论滑动模控制，事实上可以类似地在 $D(A^\alpha)(\alpha\in R)$ 中讨论，

只需对条件作少许的修改．

4 一个热加工控制问题

考虑由下列方程描述的一个热加工问题：

$$\begin{cases} \partial Q/\partial t = \partial^2 Q/\partial y^2 + F(Q) + u & 0<y<1,\ t>0 \\ Q'(0,t)=Q'(1,t)=0 & t\geqslant 0 \\ Q(y,0)=Q_0(y) & 0\leqslant y\leqslant 1 \end{cases} \tag{20}$$

其中 $Q(y,t)\in R^n$，$u(y,t)\in R^m$，(当 $t,y\in R$ 给定时)，$F(Q)$为非线性项．

从工程观点看，这个方程描述了用 m 个分布源来加热 n 个物体这样一个过程，$F(Q)$表示了环境与工厂之间热交换的特征．

显然，(20)是一个一阶抛物型分布参数系统，算子 $A=-I\partial^2/\partial y^2$,因此，(2)中的 $\alpha=\omega=1$，A 的特征值为$\{(n\pi)^2\}$. 假设 $F(Q)$满足如下的条件：

$$\langle F(Q),Q\rangle \geqslant \|Q\|^2-1/2$$

$$|F(Q_1)-F(Q_2)|\leqslant C_{2\rho}\|Q_1-Q_2\|,\quad \forall\, Q_1,\ Q_2\in D(A),$$

$$\|Q_1\|\leqslant 2\rho,\ \|Q_2\|\leqslant 2\rho.$$

$$C_2\rho=\rho/12960$$

$$\sup|F(Q)|\leqslant 5,\qquad \forall\ \|Q\|\leqslant 2\rho$$

则由注 3 可推出 $\alpha_2=1/2$，令 $\rho_1=10$，$C_2=1.58$. 则有 $\rho=360$，$C_3=1/18$. 由[5]知 $C_4=2e^{-1/2}/5$，由(9)式，可求得 $N=1$. 因此，由定理 5 可知，存在一维惯性流形，由定理 6 可知，当 $\beta>81/256C_3^2=1/1024$ 时，由反馈控制 $u=-\beta PQ$ 所确定的惯性流形上的解是稳定的，定理 7 则保证了方程(20)的解的全局稳定性．

本文对滑动模问题，提出了新的研究框架和方法．所得到的结果在实际工程中会有广泛的应用前景，当然还有许多工作，如系统的抗干扰性等,都有待于我们作进一步的研究．

参　考　文　献

1 高为炳．变结构理论基础．北京：中国科技出版社，1991

2 Orlov Yu V, Utkin V I. Sliding Mode Control in Indefinite Dimensional Systems, Automatica, 1987, 23 (6): 753～757

3 胡跃明．抛物型分布参数系统的变结构控制．控制理论与应用，1991，8 (1)：38～42

4 Zhao Yi. The Global Attractor of Infinite-dimensional Dynamical Systems Governed by A Class of Nonlinear Parabolic Variational Inequalities and Associated Control Problems. Applicable Analysis, 1993

5 Roger Teman. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Dhysics, Applied Mathematics sciences 68, 1988

Inertial Manifold and Sliding Mode Control of Nonlinear Parabolic Distributed Parameter Systems

Zhao Zhihui Liu Mingyang*

Abstract The existing conditions of finite-dimensional inertial manifold of nonlinear parabolic distributed parameter systems are presented in this paper. The sliding equation obtained in this paper is employed in the discussion of inertial manifold and the conditions to be global stable for the system. Finally, the control problem for parabolic distributed parameter systems of heat process is studied.

Keywords global attractor, inertial manifold, sliding equation, heat process

---

·简 讯·

我校理科第五批博士生导师

1993年12月，经国务院学位委员会批准，中山大学理科学科又有11位教师成为博士生导师，名单及所属专业如下：

王则柯	计算数学专业	陈用烈	高分子化学与物理专业
戴永隆	概率论与数理统计专业	高由禧	大气物理学专业
史隆培	凝聚态物理专业	屈良鹄	植物学专业
李庆行	光学专业	许实波	动物学专业
张光昭	无线电物理专业	罗进贤	微生物学专业
古练权	有机化学专业		

据悉，根据国务院学位委员会下达的文件精神，从1994年起，我校将自行审定博士生指导教师的工作.

（张 文）

* Department of mathematics, Zhongshang University, Guangzhou 510275