

一维准周期光栅衍射频谱的自相似性质

黄秀清 莫 党

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘 要 本文设计了一种一维准周期衍射光栅, 理论计算结果表明该光栅的衍射频谱具有自相似性. 文中还研究了不同相位子强度对结构因子的影响.

关键词 准周期光栅, 自相似性

分类号 O433.3, O436.1

自从 Shechtman 等人在 AL-Mn 合金中发现了 20 面体对称性结构^[1], 准晶这一崭新的物理领域引起了广大物理学家和数学家的极大兴趣. 由于一维 Fibonacci 序列所特有的结构和物理性质, 一维准晶的理论和实验工作多数以 Fibonacci 序列作为研究对象^[2~5]. 在此基础上, 人们还提出了其它模型^[6], 与 Fibonacci 序列不同, 这些模型都不能从高维空间利用投影方法得到, 而且都不具备 Fibonacci 序列所具有的完美的准周期物理性质^[2~5]. 严格地说, 这些模型都不是准晶. 最近, 我们提出并研究了一类一维二元的准晶模型, 该模型不仅象 Fibonacci 序列一样可以从二维空间投影得到^[7], 且几乎具备了 Fibonacci 序列的各种性质. 所研究的序列可以由下列的置换过程产生:

$$S \longrightarrow SL, L \longrightarrow SLS$$

这里 L 和 S 代表长和短的两个基本生成元块.

让 S_n 代表第 n 代序列, 则有:

$$S_1 = \{S\}, S_2 = \{SL\}, S_3 = \{SLSLS\} \quad (1)$$

上面的序列可以由以下的递推关系得到

$$S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (2)$$

设 F_n 为第 n 代序列所含的元块数, 即有:

$$F_n = 2F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (3)$$

其初值为: $F_1 = 1, F_2 = 2$. 令

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_{n-1}/F_n)$$

由(3)式可得 α 为下列一元二次方程的正根

$$\alpha^2 + 2\alpha = 1,$$

收稿日期: 1994-06-11

$$\alpha = \sqrt{2} - 1 = 0.414213562\cdots \quad (4)$$

在文献[7]中，我们把 α 称为“Intergrowth mean”，而相应的序列(2)为“Intergrowth Sequence”(IS).

1 IS 光栅和结构因子

图 1 是一个含有 12 条缝的第 4 代 IS 衍射光栅示意图，光栅缝宽为 a ，两种光栅常数 d_L 和 d_S 分别按 IS 序列放置. 根据高维投影方法所得的结果^[7]，本文取光栅常数之比为

$$d_L/d_S = 1 + \alpha \quad (5)$$

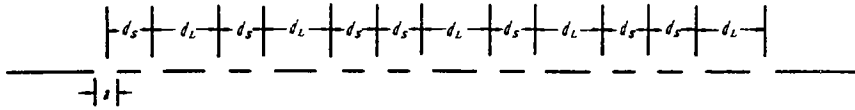


图 1 第 4 代(12 缝)IS 衍射光栅示意图

Fig.1 A 4th generation IS diffraction grating (12 slits)

观察光栅衍射的装置如图 2 所示，光栅 G 包含有 N 条宽度为 a 的狭缝，这里我们取 N 为第 n 代 IS 序列的 F_n ，光栅常数分别为 $d_L = d$ ， $d_S = d/(1 + \alpha)$ 。单色平面波(波长为 λ) 通过光栅后在透镜(焦距为 f) 焦平面上任一点 P 产生干涉。对于第 n 代光栅，狭缝的中心位置(沿 y 方向)可表示为：

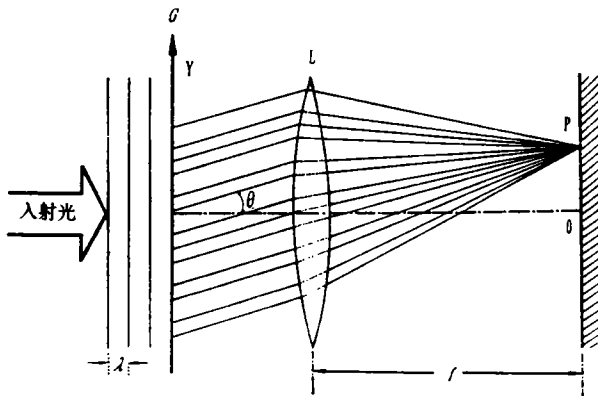


图 2 光栅衍射实验装置示意图

Fig.2 Schematic of grating diffraction experimental steup

$$\begin{aligned} y_1 &= d_s, y_2 = d_s + d_L, y_3 = 2d_s + d_L, \\ y_4 &= 2d_s + 2d_L, y_5 = 3d_s + 2d_L \end{aligned} \quad (6)$$

对于第 j 条缝的坐标位置，可由递推关系确定

$$y_j = y_{2F_m+l} = y_{2F_m} + y_l \quad 1 \leq j \leq F_n, m < n, l \leq F_{m-1} \quad (7)$$

不难看到,第 n 代光栅总宽度为

$$D_n = F_{n-1} \cdot d_L + (F_{n-1} + F_{n-2}) \cdot d_S \quad (8)$$

对于垂直入射到光栅表面的单色平面波(波长 λ),在 P 点的光强度

$$I_n = (\sin\beta/\beta)^2 \cdot J_n(\Delta\varphi), \beta = \pi a \sin\theta/\lambda \quad (9)$$

(9) 式中第一项 $(\sin\beta/\beta)^2$ 是单缝衍射因子, $J_n(\Delta\varphi)$ 是反映了光栅空间分布方式的结构因子. 下面我们主要讨论结构因子的性质,它的具体表达式为

$$J_n(\Delta\varphi) = \left| \sum_{j=0}^{F_n} \exp(i \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} \cdot y_j) \right|^2 \quad (10)$$

上式中 y_j 由(7)式给出, $J_n(0)$ 已作了归一化处理,即 $J_n(0) = 1$.

2 自相似结构因子

根据公式(10),我们计算了第 5 代 IS 准周期光栅的衍射谱(图 3),不同于周期光栅,IS 光栅衍射谱的极大值呈现出丰富的自相似结构,这一结果与 Fibonacci 系统相同^[5]. 据了解,对于其它一维准周期系统还没有类似的性质,这一结论更进一步证明了 IS 序列的准周期性. 图 3(b)和图 3(c)分别是图 3(a)和图 3(b)中位相轴的标度放大 $1/\alpha$ 倍的结果,我们可以清楚地看到放大后的衍射峰的位置与放大前完全重合.

图 3 中衍射峰的整数标记可以通过下列简单推导而得到,对于第 n 代 IS 光栅,我们引入平均光栅常数

$$\bar{d} = \frac{D_n}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot d_L + (\frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_n}) \cdot d_S \quad (11)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{F_n} = \alpha \cdot d + (\alpha + \alpha^2) \cdot \frac{d}{1 + \alpha} = 2\alpha \cdot d = (1 - \alpha^2) \cdot d \quad (12)$$

上面推导中利用了(4)和(5)式,据文献证明^[6],可以得到衍射峰的位置满足

$$\bar{d} \sin\theta = (p + q\alpha) \cdot \lambda \quad (13)$$

式中 p, q 为整数,上式可用 $\Delta\varphi$ 重新表示为

$$\Delta\varphi = 2\pi(p + q\alpha)/(1 - \alpha^2) \quad (14)$$

从(14)式我们不难得到,主极大衍射峰将出现在 p 和 q 为相继的两 IS 数,即 $(p, q) = (2, 1), (5, 2), (12, 5), (29, 12), \dots$ 这一结论与图 3 的数值结果完全一致.

3 相位子光栅

相位子(Phason)是用于描述准晶体的畸变^[9],随着相位子强度的变化,准晶体的结构将出现不同程度的畸变,其物理性质也随之发生变化. 图 4(a)是周期光栅的结构因子,其周期为 2π ,图 4(b)(c)是 IS 光栅中分别引入相位子强度为 $m_1 = (1 - 2\alpha)/(2 + \alpha) = 0.071$, $m_2 = (2 - 5\alpha)/(5 + 2\alpha) = 0.012$ 后的结构因子,从图中可以看到,其周期分别为 6π 和 14π ,即随着相位子强度的减弱,结构因子的周期越变越大,图 4(d)对应于相位子强度为零的情形,也就是完全准周期的情况,这时结构因子的周期性完全被破坏,而出现上节所研究的自相似结构.

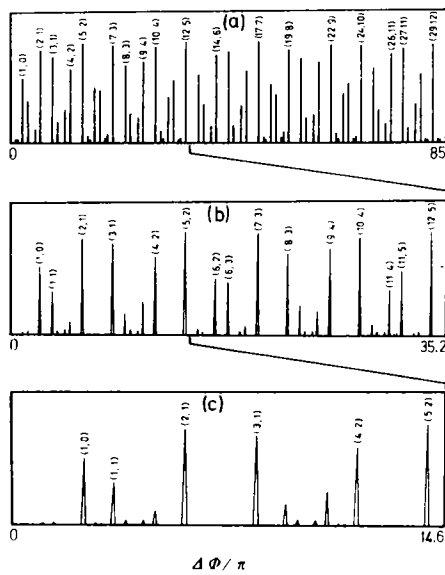


图3 IS光栅的自相似结构因子
Fig. 3 Self-similar structure factor for the IS grating

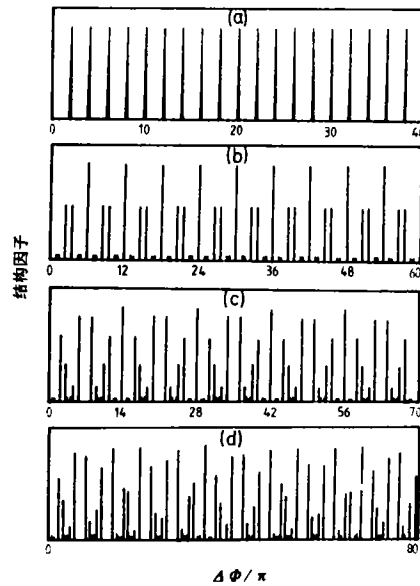


图4 结构因子
Fig. 4 Structure factor
(a) 周期光栅, (b) $m_1 = 0.072$,
(c) $m_2 = 0.012$, (d) $m_3 = 0$

作为准周期系统的一种可能应用, 本文探讨了一维 IS 准周期衍射光栅的衍射性质, 发现了其衍射频谱的自相似性质. 该理论研究提供了一种研究准周期系统的简单实验方法, 蕴藏着一定的实用价值.

参 考 文 献

- 1 Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys Rev Lett*, 1984, 53:1851
- 2 Kohmoto M, Banavar J R. Quasiperiodic lattice; Electronic properties, phonon properties, and diffusion. *Phys Rev B*, 1986, 34:563
- 3 Niu Q, Nori F. Renormalization-group study of one-dimensional quasiperiodic systems. *Phys Rev Lett*, 1986, 57:2057
- 4 Merlin R, Bajema K, Clarke R, et al. Quasiperiodic GaAs-AlAs heterostructures. *Phys Rev Lett*, 1985, 55:1768
- 5 华金龙, 冯伟国, 刘念华等. Fibonacci 光栅衍射频谱的自相似结构. *光学学报*, 1993, 13:1139
- 6 Gumbs G, Ali M K. Dynamical maps, Cantor spectra, and localization for Fibonacci and related quasiperiodic lattices. *Phys Rev Lett*, 1988, 60:1081
- 7 Huang X Q, Liu Y Y, Mo D. Transmission of light through a class of quasiperiodic

- multilayers. Solid State Commun, 1993, 87:601
- 8 Zia R K P, Dallas W J. A simple derivation of quasi-crystalline spectra. J Phys A, 1985, 18: L341
- 9 Li F H, Cheng Y F. A simple approach to quasicrystal structure and defect formulation. Acta Cryst, 1990, A46:142

The Selfsimilar Diffraction Spectra for a One-dimensional Quasi-periodic Grating

Huang Xiuqing* Mo Dang

Abstract A kind of one-dimensional quasi-periodic grating is designed. The selfsimilar diffraction spectra are evaluated and the influence of the phason strength on the structure factor is studied.

Keywords quasi-periodic grating, selfsimilar

· 书 讯 ·

有关宝石鉴定两书出版

由中山大学地质系宝玉石研究鉴定中心主任、中国及广东省宝石协会理事丘志力编著的《宝石中心包裹体——宝石鉴定的关键》已由冶金工业出版社出版。该书是作者在鉴定 1 万粒各种宝石基础上写成的,并收集了近 10 年来各种宝石包裹体的资料,附有 166 幅包裹体彩图。该书系统介绍了利用包裹体进行宝石鉴定的方法原理及鉴定的关键,是我国宝石包裹体鉴定及研究方面的第一本专业著作,是宝石鉴定的重要参考书。

另由丘志力,王建华合编著的《珠宝玉石鉴定》已由中山大学出版社出版,该书以生动活泼的语言,深入浅出地介绍了各种宝石玉石的知识及选购要诀。共 18 万字,配有 80 多幅彩图,适合专业人士及各阶层读者阅读。

(兰)

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275