第34卷 第2期
1995年 4月

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 2
Apr. 1995

强非线性振子的受迫振动*

徐 兆 詹杰民

（中山大学应用力学与工程系，广州 510275）

摘 要 应用一种推广的平均法研究强非线性振子的共振响应，与数值积分法作了比较，结果是令人满意的.

关键词 强非线性振子，共振响应，平均法

分类号 O322

目前广泛应用的摄动法如 Lindstedt－Poincaré（L－P）法，Krylov－Bogoliubov－Mitropolski（KBM）法，多重尺度法和平均法对弱非线性系统是很有效的，而对强非线性系统则难以应用. 近年来不少学者在探索适用于强非线性系统的分析方法. 对于三次非线性系统 Ottoy 等提出了椭圆函数法[1,2]，Burton[3]提出了时间变换法，对于更一般的系统徐兆等提出了新的渐近解法[4,5]和非线性时间变换法[6,7]，戴世强和庄峰青[8]推广了 KBM 法，李骊[9]推广了频闪法. 其他方法可参阅文献[10，11].

对于强非线性受迫振动系统

$$\ddot{x} + g(x) = \varepsilon f(x,\dot{x},\Omega t) \tag{1}$$

的共振问题尚缺乏有效的分析方法，这里 $g(x)$ 为非线性函数，$\varepsilon > 0$ 为小参数，本文把经典的平均法加以推广使能适用于系统(1). 提出一类比椭圆函数更广的广义谐波函数，代替普通的谐波函数，因而解决了原有方法难以解决的问题，且计算方法简单、方便.

1 广义谐波函数

先求解退化方程($\varepsilon = 0$)

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \tag{2}$$

对方程(2)积分得

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + v(x) = E \tag{3}$$

其中 $v(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$. 假设 $g(x)$ 和 $v(x)$ 满足下列条件：(i)$g(0) = 0$；(ii) 存在 $x_0 > 0$，使 $g(x_0) \neq 0$ 和 $v(x_0) > 0$；(iii) 可求 $x_1 < 0$，使 $g(x_1) \neq 0$ 和 $v(x_1) = v(x_0)$；(iv) 对于 x

收稿日期：1993-10-27

* 中山大学高等学术研究中心基金会（香港）资助项目

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\in (x_1,x_0)$，有 $v(x)<v(x_0)$. 在这些条件下可以证明(2)在相平面上有闭轨线[12]. 这些闭轨线可表示为如下形式

$$x(t)=a\cos(\tau(t)+\theta)+b \tag{4}$$

或

$$x(t)=a\cos\varphi(t)+b,\quad \varphi(t)=\tau(t)+\theta \tag{5}$$

式中，$\tau(t)$ 是 t 的函数，a,b 和 θ 为常数，$a+b=x_0$，$-a+b=x_1$. 现在把

$\dot{x}=-a\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t\sin(\tau(t)+\theta)$ 和(5)代入方程(3)得

$$\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t=\{[2v(a+b)-2v(a\cos\varphi+b)]/a^2\sin^2\varphi\}^{\frac{1}{2}}\overset{\text{定义}}{=\!=}\Phi(a,\varphi) \tag{6}$$

和

$$v(a+b)=v(-a+b)=E \tag{7}$$

因此，

$$\dot{x}(t)=-a\Phi(a,\varphi(t))\sin\varphi(t),\quad \varphi(t)=\tau(t)+\theta$$

当 $g(x)=w_0^2x$ 时，$v(x)=\frac{1}{2}w_0^2x^2$. 由(6)和(7)得 $b=0$，$\Phi(a,\varphi)=w_0$，$\varphi(t)=w_0t+\theta$. 此时，函数 $\cos\varphi(t)$ 和 $\sin\varphi(t)$ 变为简谐函数 $\cos(w_0t+\theta)$ 和 $\sin(w_0t+\theta)$. 因此，我们称函数 $\cos\varphi(t)$ 和 $\sin\varphi(t)$ 为广义谐波函数.

当 $g(x)=k_1x+k_3x^3$，k_1 为任意常数，$k_3>0$ 时，$v(x)=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{4}k_3x^4$. 由(6)和(7)得 $b=0$，$\Phi(a,\varphi)=w\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$，

$$w^2=k_1+k_3a^2,\quad k^2=\frac{k_3a^2}{2(k_1+k_3a^2)}$$

此时由(6)积分得

$$wt+\varphi_0=\int_0^{\varphi}\mathrm{d}u/\sqrt{1-k^2\sin^2u}$$

于是 $a\cos\varphi(t)=a\mathrm{cn}(wt+\varphi_0,k)$，其中 cn 是 Jacobi 椭圆余弦函数，当 $k_1>0$ 和 $k_3<0$ 时有类似情况. 即椭圆函数是广义谐波函数的特殊类型.

2 推广的平均法

现在求解方程(1)($\varepsilon\neq 0$)，其中 $f(x,\dot{x},\Omega t)$ 关于 t 是周期函数，周期 $T=2\pi/\Omega$，退化方程(2)的周期 T_0 由(6)可表为

$$T_0=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi/\Phi(a,\varphi)$$

设

$$\Phi^{-1}(a,\varphi)=c_0(a)+\sum_{n=1}^{M}c_n(a)\cos n\varphi,\quad \varphi=\tau(t)+\theta \tag{8}$$

则

$$T_0=2\pi c_0(a) \tag{9}$$

因此，退化方程(2)周期解的频率为

$$w(a)=1/c_0(a) \tag{10}$$

考虑共振情形，设

$$\Omega/w(a)=q/p+\varepsilon\sigma \tag{11}$$

其中，p，q 为互素正整数，σ 为解谐参数，把(8)代入(6)，然后积分，并考虑到(10)和(11)得

$$\Omega t=\frac{q}{p}\varphi+\varepsilon\sigma\tau-\frac{q}{p}\theta+\Omega\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}c_n(a)\sin n\varphi \tag{12}$$

应用常数变易法，把(5)的 a,b,θ 看作是 t 的函数，即设方法(1)的解为

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x = a(t)\cos\varphi(t) + b(t) \tag{13}$$

$$\dot{x} = -a(t)\Phi(a(t),\varphi(t))\sin\varphi(t),\quad \varphi(t) = \tau(t) + \theta(t)$$

对 x 关于 t 求导并保持(13)式中 $\dot{x}$ 的表达式，得

$$\dot{a}(\cos\varphi + h) - \theta a\sin\varphi = 0 \tag{14}$$

其中
$$h = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = \frac{g(-a+b) + g(a+b)}{g(-a+b) - g(a+b)} \tag{15}$$

它是由(7)关于 a 求导而得到的，再对 $\dot{x}$ 关于 t 求导并代入方程(1)得

$$\dot{a}\left[\Phi(a,\varphi)\sin\varphi + a\frac{\partial}{\partial a}(\Phi(a,\varphi)\sin\varphi)\right] + \dot{\theta}a\frac{\partial}{\partial\varphi}[\Phi(a,\varphi)\sin\varphi]$$
$$= -\varepsilon f(a\cos\varphi + b, -a\Phi(a,\varphi)\sin\varphi, \Omega t) \tag{16}$$

由(14)和(16)解出 $\dot{a}$ 和 $\dot{\theta}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon a}{g(a+b)(1+h)}f(a\cos\varphi + b, -a\Phi(a,\varphi)\sin\varphi, \Omega t)\Phi(a,\varphi)\sin\varphi \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon}{g(a+b)(1+h)}f(a\cos\varphi + b, -a\Phi(a,\varphi)\sin\varphi, \Omega t)\Phi(a,\varphi)(\cos\varphi + h) \tag{18}$$

再由(6)和(12)把上两式中的 t 消去，得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\varepsilon a}{g(a+b)(1+h)}f_0(a,\psi,\gamma)\sin p\psi \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\varepsilon}{g(a+b)(1+h)}f_0(a,\psi,\gamma)(\cos p\psi + h) \tag{20}$$

其中
$$\psi = \varphi/p,\quad \gamma = \varepsilon\sigma\tau - q\theta/p \tag{21}$$

$$f_0(a,\psi,\gamma) = f\left(a\cos p\psi + b, -a\Phi(a,p\psi)\sin p\psi,\right.$$
$$\left. q\psi + \gamma + \Omega\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}c_n(a)\sin np\psi\right) \tag{22}$$

现在方程(19)和(20)右边是 ψ 的周期函数，周期为 2π，应用平均法，(19)和(20)右边用其平均值代替，得

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon A(a,\gamma) \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon B(a,\gamma) \tag{24}$$

其中
$$A(a,\gamma) = -\frac{a}{2\pi g(a+b)(1+h)}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\gamma)\sin p\psi\,\mathrm{d}\psi \tag{25}$$

$$B(a,\gamma) = -\frac{1}{2\pi g(a+b)(1+h)}\int_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\gamma)(\cos p\psi + h)\,\mathrm{d}\psi \tag{26}$$

方程(23)和(24)可化为自治系统. 因为 $\gamma = \varepsilon\sigma\tau - q\theta/p$，方程(24)可化为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon\sigma - \varepsilon\frac{q}{p}B(a,\gamma) \tag{27}$$

稳态运动对应着 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\tau = 0$ 和 $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\tau = 0$，即

$$\left.\begin{aligned} &A(a,\gamma) = 0 \\ &\frac{\Omega}{w(a)} - \frac{q}{p} - \varepsilon\frac{q}{p}B(a,\gamma) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

从(28)两个方程中消去 γ 可得频率响应方程. 由此不难看出，这是普通平均法的推广. 但一般平均法仅适用于弱非线性系统，即 $g(x) = w_0^2 x$. 而推广的平均法则可用于 $g(x)$ 为非线性函数的情形，即强非线性情形. 下面讨论一些例子.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 带立方非线性的系统

作为推广的平均法的第一个应用，考虑具有立方非线性的 Duffing 振子的受迫振动：

$$\ddot{x} + k_1^2 x + k_3 x^3 = \varepsilon(-\mu\dot{x} + E\cos\Omega t) \tag{29}$$

这里 k_3 是任意常数，不必为小量；$f(x,\dot{x},\Omega t) = -\mu\dot{x} + E\cos\Omega t$，$g(x) = k_1^2 x + k_3 x^3$，$v(x) = \frac{1}{2}k_1^2 x^2 + \frac{1}{4}k_3 x^4$. 由(7)式，$v(a+b) = v(-a+b)$，得 $b = 0$. 由(6)和(15)得

$$h = 0, \Phi(a,\varphi) = \sqrt{k_1^2 + 0.75k_3a^2 + 0.25k_3a^2\cos 2\varphi}$$

把 $\Phi^{-1}(a,\varphi)$ 展为 Fourier 级数，

$$\Phi^{-1}(a,\varphi) = c_0(a) + \sum_{n=1}^{M} c_{2n}(a)\cos 2n\varphi \tag{30}$$

其中

$$c_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^{-1}(a,\varphi)\mathrm{d}\varphi, \quad c_{2n}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^{-1}(a,\varphi)\cos 2n\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

我们考虑主共振情形，即 $p = q = 1$

$$\frac{\Omega}{w(a)} = 1 + \varepsilon\sigma \tag{31}$$

式中 $w(a)$ 由(10)可表为 $w(a) = c_0^{-1}(a)$. 由(22)，(25)和(26)得

$$A(a,\gamma) = \frac{-1}{2\pi(k_1^2 + k_3a^2)}\int_0^{2\pi}[\mu a\Phi(a,\varphi)\sin^2\varphi + E\cos(\gamma+\psi)\sin\varphi]\mathrm{d}\varphi \tag{32}$$

$$B(a,\gamma) = \frac{-1}{2\pi(k_1^2 a + k^3a^3)}\int_0^{2\pi}[\mu a\Phi(a,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + E\cos(\gamma+\psi)\cos\varphi]\mathrm{d}\varphi \tag{33}$$

其中

$$\psi = \varphi + \Omega\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{2n}c_{2n}(a)\sin 2n\varphi$$

把(31)，(32)和(33)代入(28)得

$$\left.\begin{aligned}\sin\gamma &= \frac{\mu a\int_0^{2\pi}\Phi(a,\varphi)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{E\int_0^{2\pi}\sin\psi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}\\ \Omega &= w(a) \pm \frac{\varepsilon E w(a)\sqrt{1-\sin^2\gamma}}{2\pi(k_1^2 a + k_3a^3)}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

图1给出了两组系数的频率响应曲线：

(a) $k_1 = 3$，$k_3 = 30$，$\varepsilon = 1$，$\mu = 0.2$，$E = 2$；

(b) $k_1 = 3$，$k_3 = -30$，$\varepsilon = 1$，$\mu = 0.2$，$E = 2$.

图中还给出用四阶 Runge－Kutta 法求解方程(29)的结果. 用推广的平均法得到的是一阶近似，结果是令人满意的.

4 带平方非线性的系统

研究具有平方非线性的系统

$$\ddot{x} + n_1^2 x + n_2 x^2 = \varepsilon(-\mu\dot{x} + E\cos\Omega t) \tag{35}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

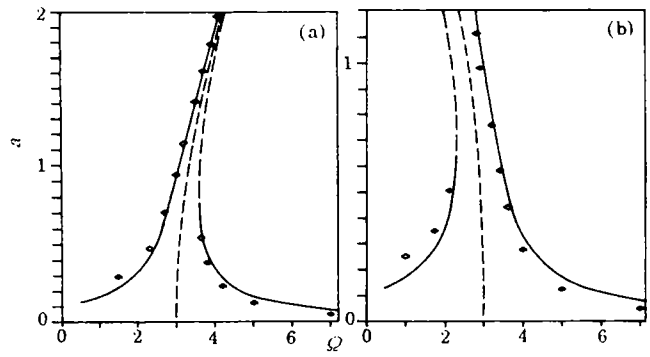

图 1　方程(29)主共振的频率响应曲线

Fig. 1　Frequency — response curves for primary resonances of equation(29)

—— 推广的平均法，◇ 数值积分法

式中，n_2 是任意常数，$f(x,\dot{x},\Omega t) = -\mu\dot{x} + E\cos\Omega t$，$g(x) = n_1^2 x + n_2 x^2$，$v(x) = \frac{1}{2}n_1^2x^2 + \frac{1}{3}n_2x^3$. 由(6)，(7)和(15)求得

$$b = \frac{-n_1^2 + \sqrt{n_1^4 - \frac{4}{3}n_2^2a^2}}{2n_2}, \quad h = \frac{n_1^2b + n_2(a^2+b^2)}{n_1^2a + 2n_2ab}$$

$$\Phi(a,\varphi) = \sqrt{n_1^2 + 2n_2b + \frac{2}{3}n_2a\cos\varphi}$$

再把 $\Phi^{-1}(a,\varphi)$ 展为 Fourier 级数，

$$\Phi^{-1}(a,\varphi) = c_0(a) + \sum_{n=1}^{M} c_n(a)\cos n\varphi$$

对于主共振情形，$p = q = 1$，类似上节得到

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\mu a\int_0^{2\pi}\Phi(a,\varphi)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{E\int_0^{2\pi}\sin\psi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi} \\ \Omega &= w(a) \pm \frac{\varepsilon E w(a)\sqrt{1-\sin^2\gamma}}{2\pi(1+h)[n_1^2(a+b)+n_2(a+b)^2]}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

结果也是满意的.

5　结　论

引进了广义谐波函数的概念，把经典的平均法推广到强非线性振动系统，实例表明本方法是有效的. 广义谐波函数 $\cos\varphi(t)$ 和 $\sin\varphi(t)$ 是 t 的复杂函数，但对 φ 来说却是简单的谐波函数，本文的特点是把 t 用 φ 来表示，从而使全部计算化为普通三角函数，计算简单方便，适用范围广. 本文方法还可应用于强非线性自振系统的极限环问题，和多自由度

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

强非线性振动系统的共振问题．我们将另文论述．

参 考 文 献

1 Ottoy J P. An extension of the van der Pol oscillator. Int J Control, 1980. 4:691 ～ 703

2 Yuste S B et al. Improvement of a Krylov — Bogoliubov method that use Jacobi elliptic functions. J Sound vib, 1990, 139(1):151 ～ 163

3 Burton T D. Nonlinear oscillator limit cycle analysis using a timetransformation approach. Int J Nonlinear Mech, 1982, 17:7 ～ 19

4 徐兆. 非线性力学中一种新的渐近方法. 力学学报,1985,3:266 ～ 271

5 Xu Zhao, Zhang Lingqi. Asymptotic method for analysis of non — linear systems with two parameters. Acta Mathematica Scientia. 1986,6(4):453 ～ 462

6 徐兆,黄赫彪. 非线性振子极限环的实用分析法. 力学与实践,1988,5:6 ～ 11

7 Xu Zhao. Nonlinear time transformation method for strong nonlinear oscillation systems. Acta Mechanica Sinica, 1992,8(3):279 ～ 288

8 戴世强,庄峰青. 一类非线性振动系统的渐近解. 中国科学,1986,A(1):34 ～ 40

9 李骊. 强非线性系统的频闪法. 力学学报,1990,22:402 ～ 412

10 吴福光,蔡承武,徐兆. 振动理论. 北京:高等教育出版社,1987

11 陈予恕. 非线性振动、分叉和混沌理论及其应用. 振动工程学报,1992,3:235 ～ 250

12 Burton T D, et al. Analysis of non — linear autonomous conservative oscillators by a time transformation method. J Sound Vib, 1983,87:543 ～ 554

Forced Oscillations of Strongly Nonlinear Oscillators

Xu Zhao Zhan Jiemin*

Abstract A generalized averaging method is used to analyze the resonant response of the strongly nonlinear oscillators. A comparison with the numerically calculated result shows that the generalized averaging method in this paper has its advantage.

Keywords strongly nonlinear oscillators, resonant response, averaging method

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net