

# 线性驱动下一级相变的重正化群理论

钟 凡

(中山大学物理学系, 广州 510275)

**摘 要** 把重正化群理论应用于一受外场驱动而发生一级相变的系统中, 结果表明, 与有序化过程一样, 该系统也由零温不动点所决定, 并得到磁化强度及结构函数的新的动力学标度关系. 由此可获得滞后回线面积与变场速率的标度关系.

**关键词** 一级相变, 滞后, 变场速率, 标度关系, 重正化群

**分类号** O414. 21, O482. 51

滞后现象是一级相变的一个普遍特征. 早在上个世纪末, 对交流磁化的损耗就发现很多软磁材料中等磁场都服从 Steinmetz 定律<sup>[1]</sup>. 90 年代以来, 有序化理论被应用于对 Steinmetz 定律的研究. 考虑具有交变磁场作用下的  $(\Phi^2)^2$  模型在  $N$  趋于无穷时的动力学, 由数值解可得到磁滞回线, 并求得小磁场振幅  $H_0$  及频率  $\omega$  下回线面积的标度关系<sup>[2]</sup> 为:  $A \approx H_0^\alpha \omega^\beta$ . 其中  $\alpha = \beta = 1/2$ . Somoza 等<sup>[3]</sup> 对小的磁场肯定了这一结果, 并证明它与自由能的形式无关, 只由零温不动点决定, 具有普适性. 因为小振幅及频率时正弦变化的磁场可以展开, 因而实际上与以振幅及频率的乘积为速率的线性变化磁场一样. 因此, 对以  $\dot{H}$  为变化速率的磁场, 滞后回线的面积可表为<sup>[4, 5]</sup>

$$A \approx a\dot{H}^n, \quad n = 1/2 \quad (1)$$

而对平均场模型, 普适关系则为:  $A \approx A_0 + a\dot{H}^n$ ,  $n = 2/3$ .

这些结果的普适性意味着重正化群理论可能有助于对其理解. 对于大  $N$  模型的分相动力学, 结构函数及畴的长大规律是由零温不动点所决定的这一点, 已得到肯定, 并由动量空间的重正化群理论所证实<sup>[6, 7]</sup>. 实际上, 由于模型的连续对称性, 存在无能隙的 Goldstone 激发, 因此系统的长大过程与温度无关, 完全由模型本身的结构所决定, 因而物理上自然应该由零温强相互作用不动点所决定. 可以预期, 对于小的外场变化速度, 系统的响应也应该由相同的不动点所决定.

## 1 重正化群理论

### 1.1 模 型

利用外场  $H$  中具有  $N$  分量序参量的 Ginzburg — Landau — Wilson 自由能泛函<sup>[2]</sup>

$$F[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^d x [c(\nabla\Phi)^2 + r\Phi^2 + \frac{u}{2N}(\Phi^2)^2 - 2\sqrt{NH} \cdot \Phi] \quad (2)$$

其动力学由 Langevin 方程决定

$$\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\delta F[\Phi]}{\delta\Phi(x,t)} + \eta(x,t) \quad (3)$$

其中  $\lambda$  为动力学系数,  $T$  为温度,  $d$  为空间维数,  $\eta(x,t)$  是具有零平均且方差为

$$\langle \eta_i(x,t)\eta_j(x',t') \rangle = 2\lambda T \delta_{ij} \delta(x-x') \delta(t-t') \quad (4)$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 上述方程约化为为一组耦合积分-微分方程<sup>[2]</sup>

$$dM/dt = -\lambda(\xi_{\perp} M - H) \quad (5)$$

$$\partial C_{\perp}(k,t)/\partial t = 2\lambda T - 2\lambda(ck^2 + \xi_{\perp})C_{\perp}(k,t) \quad (6)$$

$$\xi_{\perp} = r + uS + uM^2 \quad (7)$$

$$S = \int [d^d k / (2\pi)^d] C_{\perp}(k,t) \quad (8)$$

其中  $C_{\perp}(k,t)$  为横向结构函数,  $M$  为磁化强度. 我们只考虑横模. 为简洁起见, 下面我们略去  $\perp$ .

## 1.2 重正化分析

考虑一处在负外场下达到平衡的系统, 且外场以恒速率  $H$  增加. 我们把时间零点取在外场为零处, 即有

$$H = \dot{H}t \quad (9)$$

按照重正化群的标准做法<sup>[8]</sup>, 先消去“硬模”, 即波数满足  $\Lambda/b < k < \Lambda$  ( $b > 1$ ) 的模. 方法是从方程(5~8)中解出这些模的演化规律, 然后代入到余下的“软模” $k < \Lambda/b$  的方程中. 经过这一步骤之后, 软模的演化还是由方程(5~8)决定, 只是  $\xi$  变为

$$\xi(t) = r + uM(t)^2 + uS_s(t) + uS_h(t) \quad (10)$$

其中下标  $s$  和  $h$  分别表示对软和硬模的积分.

对于小的外场变化速率, 硬模的结构函数近似能按稳态解演化, 即  $\xi_s M = H$ , 一直到  $H > 0$ . 因此, 硬模的结构函数近似为

$$C_h(k,t) \approx T/(ck^2 + \xi_s) \approx T/(ck^2 + H/M)$$

因而对小的速率及磁场, 相对于硬模的大的  $k$ , 上式中  $H/M$  可以忽略. 所以,

$$S_h(t) \sim TK_c(1 - b^{2-d})/c \quad (11)$$

其中  $K_c = 2^{-d+1}\pi^{-d/2} \Lambda^{d-2}/[(d-2)\Gamma(d/2)]$ <sup>[8]</sup>, 而  $\Gamma(d/2)$  为 gamma 函数. 因此, 粗化过程没有产生新的项.

重正化的第二步是重新标度. 把软模的波数通过  $k = k'/b$  的变换而使这些模的紫外截断  $\Lambda$  重新回到原来的值, 同时为使标度不变, 必须把时间  $t$  及序参量  $\Phi$  也随着改变. 按文献<sup>[8]</sup>的记号

$$\begin{aligned} k &= bk', & x &= x'/b, & t &= b^2 t' \\ \Phi(x) &= b^y \Phi'(x'), & \Phi_k &= b^{y+d/2} \Phi'_k, \end{aligned} \quad (12)$$

因此,  $M(t) = \langle \Phi \rangle = b^y M'(t')$ ,

$$C(k,t) = \langle \Phi_k(t)\Phi_{-k}(t) \rangle = b^{d+2y} C'(k',t'),$$

$$S(t) = b^{2y} S'(t') \quad (13)$$

将方程(12,13)代入(5~8),并利用式(9),可以把得到的方程改写为原来(5~8)的形式,只是现在是关于带撇量的方程.由此我们得到递推关系

$$\begin{aligned} c' &= b^{z-2}c & T' &= b^{z-d-2y}T, & \dot{H}' &= b^{2z-y}\dot{H} \\ \xi'(t') &= r' + u'M'^2(t') + u's'(t') & &= b^z\xi(b^2t) \end{aligned} \quad (14)$$

利用方程(10)和(11)可以得到另两个关系

$$u' = b^{z+2y}u, \quad \tau' = b^z\tau \quad (15)$$

其中  $\tau = r + uTK_c/c = r(T_c - T)/T_c$ , 且  $T_c = -rc/(uK_c)$ .

### 1.3 结 果

对零温不动点,  $c$  和  $\tau/u$  必须有限<sup>[7]</sup>, 因此,

$$z = 2, \quad y = 0$$

所以,  $\tau' = b^2\tau, \quad u' = b^2u$

Hamiltonian 中的高阶项, 如  $(\Phi^2)^3$  的系数, 除了重整化低阶项的系数之外, 也以相同的方式变换. 因而 Hamiltonian 也按  $b^{d-2}$  的形式转换. 因此结果与  $F[\Phi]$  的具体形式无关. 这与先前的结果一致.

由式(14)可见, 温度按  $b^{2-d}$  变换, 与 Hamiltonian 一致. 实际上为使运动方程(3)不变, 可通过让 Hamiltonian 不变而只使温度变. 因而我们可以只考虑温度. 所以

$$M(\dot{H}, t, T) = M'(H', t', T') = M(\dot{H}', t', T') = M(b^d\dot{H}, b^2t, b^{2-d}T)$$

$$C(k, \dot{H}, t, T) = C'(k', \dot{H}', t', T') = C(k', \dot{H}', t', T') = b^d C(k/b, b^d\dot{H}, b^2t, b^{2-d}T)$$

令  $b = \dot{H}^{-1/4} (> 1)$ , 最后得到主要结果

$$M(\dot{H}, t, T) = f(\dot{H}^{1/2}t, \dot{H}^{(d-2)/4}T) \quad (16)$$

$$C(k, \dot{H}, t, T) = H^{-d/4}f'(H^{-1/4}k, \dot{H}^{1/2}t, \dot{H}^{(d-2)/4}T) \quad (17)$$

改变  $\dot{H}$  的符号, 可得到滞后回线的另一半, 因而由式(16)可求得滞后回线面积  $A \sim 2 \int M dH$ , 即

$$A = \dot{H}^{1/2}g(\dot{H}^{(d-2)/4}T) \quad (18)$$

上三式中  $f, f'$  和  $g$  都是标度函数.  $g(x)$  是对(1)式的修正. 对足够低的温度和小的  $\dot{H}$ , 上式回到方程(1).

## 2 与数值结果的比较与分析

本文的主要结果包含在式(16~18)中. 对  $d = 2, T$  是不变量, 因而  $\alpha$  准确地等于  $1/2$ . 对  $d > 2$ , 当  $T$  及  $\dot{H}$  足够小时,  $\dot{H}^{(d-2)/4}T$  也很小, 因而  $\alpha$  接近于  $1/2$ . 这些与数值解的结果一致<sup>[4]</sup>. 这里我们主要验证方程(16, 17).

对  $d = 2$ , 只要将磁化强度以变量  $H^{1/2}t$  为标度作图, 不同速率下的曲线就能重合. 而结构函数的标度形式则需将  $C(k, \dot{H}, t, T)\dot{H}^{d/4}$  以约化波数  $\dot{H}^{-1/4}k$  和时间  $\dot{H}^{1/2}t$  为标度作图. 而当  $d > 2$  时, 由式(16, 17)可见, 为使不同变化速率的曲线能重合为同一标度形式, 对大的  $\dot{H}$ , 温度  $T$  必须同时降低, 以便抑制涨落以使形貌与低  $\dot{H}$  的相似. 因此, 对一具有  $\dot{H}$  和  $T$  的参考曲线, 速率为  $\dot{H}'$  的曲线的温度必须等于  $(\dot{H}/\dot{H}')^{(d-2)/4}T$ , 这样才能使结果重合为同一曲线. 图 2 给出图 1 的原始磁化强度曲线的标度形式, 其中速率为 0.005 的曲线的

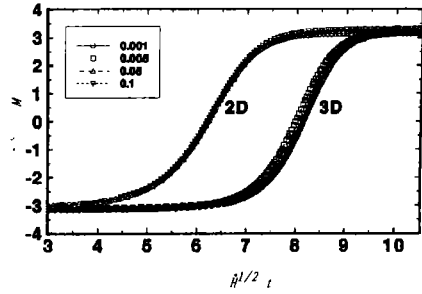
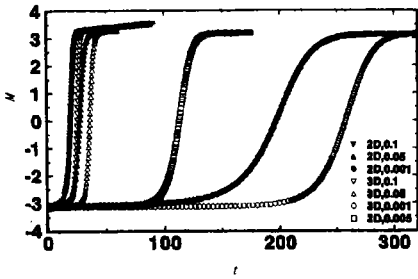


图 1 2D 和 3D 下不同温度和速率的磁化曲线

图 2 二、三维空间的标度磁化曲线

Fig. 1 Magnetization vs time with different temperatures and field rates in 2D and 3D

Fig. 2 Scaled magnetization curves

温度没有作相应改变, 因而不可能重合在其它曲线上, 它只是用来显示温度的效应. 图 4 给出二维情况下图 3 中不同速率的原始结构函数曲面的标度形式. 可见结果符合得极好.

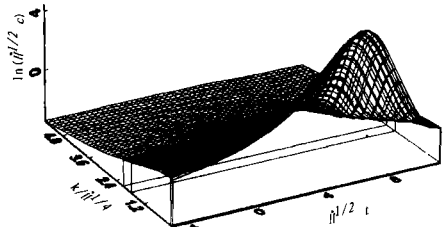
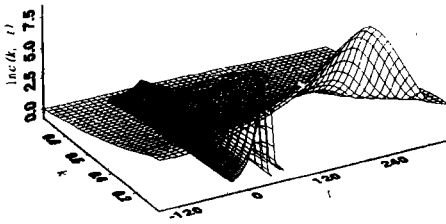


图 3 速率分别为 0.1, 0.01 和 0.001 的结构函数

图 4 标度化结构函数

Fig. 3 Structure factors with different field rates

Fig. 4 Scaled structure factors

最后需要指出, 在  $T = 0$  的极限情况下,  $H$  必须趋于无穷, 因而转变磁场移向有限值, 即 Spinodal 点. 因为这种情况下的平衡结构函数为零, 动力学方程退化到平均场理论的形式, 耗散指数  $\alpha$  也就过渡到平均场的  $2/3$ .

本文把重正化群理论应用于大  $N$  模型中外场线性驱动下的一级相变, 得到了与驱动速率有关的新的动力学标度关系, 对相变循环中的能量耗散这一特殊情形也得到新的标度形式, 结果很好地与数值计算一致. 由此建立起与驱动速率标度关系的理论基础.

### 参 考 文 献

- 1 北京大学物理系. 铁磁学. 北京: 科学出版社, 1976
- 2 Rao M, Krishnamurthy H R, Pandit R. Magnetic hysteresis in two model systems. Phys Rev B, 1990, 42: 856

- 3 Somoza A M, Desai R C. Kinetics of systems with continuous symmetry under the effect of an external field. *Phys Rev Lett*, 1993, 70:3279
- 4 Zhong F, Zhang J X, Siu G G. Dynamic scaling of hysteresis in a linearly driven system. *J Phys Condens Matter*. 1994, 6:7785
- 5 Zhong F, Zhang J X. Scaling of thermal hysteresis with temperature scanning rate. *Phys Rev E*, 1995, 51:2898
- 6 Bray A J. Exact renormalization-group results for domain-growth scaling in spinodal decomposition. *Phys Rev Lett*, 1989, 62: 2841; and Renormalization-group approach to domain-growth scaling. *Phys Rev B*, 1990, 41:6724
- 7 Conglio A, Zannetti M. Scaling and crossover in the large-N model for growth kinetics. *Phys Rev E*, 1994, 50:1046
- 8 Ma S K. *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1976

## Renormalization Group Theory of First-Order Phase Transitions under Linear Driving External Field

*Zhong Fan* \*

**Abstract** We apply for the first time renormalization group theory to a system with a first-order phase transition between opposite magnetizations driven linearly by an external magnetic field. The system is described by the large-N model with continuous symmetry and its dynamics is governed by the time-dependent Ginzburg-Landau model. We show explicitly that the driven transition is also governed by the zero-temperature fixed point, and obtain novel dynamic scaling forms for the magnetization and the structure factor. From these relations the scaling form for the area of hysteresis loop with corrections follows naturally. Numerical results agree excellently with the theoretical predictions.

**Keywords** first-order phase transitions, hysteresis, change rate of external field, scaling relations, renormalization group

---

\* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275