第 33 卷 第 4 期
1994 年 10 月
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 33 No. 4
Oct. 1994

无不动点自同构群的一个结果*

王 燕 鸣
（中山大学数学系，广州 510275）

摘 要 本文用初等方法证明了一类无不动点自同构群的有限单群的可解性.

关键词 可解群，单群，无不动点作用
分类号 O15

1 前 言

关于允许一个互素阶的无不动点自同构群 A 的有限群 G 的可解性的研究，已有很多好的结果. 去掉互素阶的条件，代之以 A 循环的条件，许多重要的方法与结论都很相似. 事实上，借助有限单群的完全分类定理，上述情况下的 G 的可解性已得到证实[1,2]. 不用单群分类定理的研究，仍有必要继续，因其方法与意义都有本质上的不同，参见〔3〕，〔4〕. 在（$|G|$，$|A|$）$=1$ 或 A 循环的假设下，由于无不动点自用对 G 的每个 A-不变截段都能自动地保持，可以比较方便地利用归纳法，已形成了一套行之有效的分析极小反例的方法. 但若取消（$|G|$，$|A|$）$=1$ 或 A 循环的假设后，问题通常困难得多. 作为一种尝试，Parrott 等人[5]近年来考虑了下面最为简单的情形，A 为 3 次对称群 S_3. 这实际上是阶最小的非循环且非互素阶的情形（因为在 $|A|=4=2^2$ 且 $C_G(A)=e$ 时，由轨道公式立即可推出（$|G|$，$|A|$）$=1$).〔5〕中证明了：设 G 为有限群，A 为 G 的自同构群，如果 $3\nmid|G|$，$C_G(A)=e$，$A\cong S_3$，则 G 可解. 注意到 $S_3=C_3 \quad C_2$ 有循环的 Hall $\pi(G)$-子群 C_2 及正规 $\pi(G)$-补 C_3（G 非奇阶群时），我们考虑如下较一般的假设条件. 假设 $12\nmid|G|$，A 有一个幂零的 Hall $\pi(G)$子群且 A 有正规 $\pi(G)$-补. 在上述假设条件下，同样可证明 G 的可解性，且证明简单初等.

本文所用的符号与术语以〔6〕为标准. 所涉及的群均为有限群. 为简便且不混淆，记群的单位元 e 为 1. $C_G(A)=\{g\in G|g^a=g, \forall a\in A\}$. $\pi(G)$表示 G 的阶 $|G|$ 的素因子的集合. 设 π 为一素数集，称 $A\in E_\pi^*$，如果 A 有一个幂零的 Hall π-子群. 称 $A\in D_\pi$，

收稿日期：1992-12-02.
* 国家自然科学基金和广东省科委基金资助项目

如果 A 的所有 π-子群都共轭地含于 A 的某个 Hall π-子群中．在不混淆的情况下，A_π 表示 A 的一个 Hall π-子群．π' 为 π 的补集，称 A 无不动点地作用在 G 上，如果 $C_G(A)=1$.

2 定理及其证明

定理 设 G 为有限群，A 为 G 的一个作用群．如果 $C_G(A)=1$，$12\nmid|G|$，A 有一个幂零的 Hall $\pi(G)$-子群且 A 有正规 $\pi(G)$-补．则 G 可解．

证明 用反证法．假设结论不成立．取 G 为使 $|G|+|A|$ 极小的反例，则有：

(1) G 的每个 A-不变真子群都可解．

事实上，任取 G 的 A-不变真子群 G_1，由于 $C_{G_1}(A)\leqslant C_G(A)=1$ 且 $\pi(G_1)\subseteq\pi(G)$. 由定义 $A\in E^n_{\pi(G)}$ 知 $A\in E^n_{\pi(G_1)}$. A 有正规 $\pi(G)$-补 $A_{\pi(G)'}$ 又 A 有幂零的 Hall $\pi(G)$-子群．易得 A 有正规 $\pi(G_1)$-补．另外 $12\nmid|G|$，推出 $12\nmid|G_1|$. 故 (G_1,A) 满足定理中关于 (G,A) 的所有假设条件．由于 $|G_1|+|A|<|G|+|A|$，由 G 的极小选取知 G_1 可解．

(2) A 忠实地作用在 G 上，$A\leqslant \mathrm{Aut}\ (G)$，$GA=G\rtimes A$.

考虑 $\overline{A}=A/C_A\ (G)$，则 $\overline{A}\in E^n_{\pi(G)}$ 且 $\overline{A}$ 有正规 $\pi(G)$-补．$C_G(\overline{A})=C_G(A)=1$. 即 $(G,\overline{A})$ 满足定理中关于 (G,A) 的所有假设，由 G 的不可解性及极小选取，知 $|A|=|\overline{A}|$，即 $C_A(G)=1$，A 忠实地作用在 G 上．按自然方式可视为 $A\leqslant \mathrm{Aut}(G)$ 及 $GA=G\rtimes A$.

(3) G 没有非单位群的 A-不变正规真子群．特别地，G 是特征单群，$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_k$ 是一些同构的非交换单群的直积．其中每个 G_i 都是 G 的极小正规子群．

事实上，若结论不真．则存在 G 的极小正规子群 N，$1\neq N<G$. 由 (1) 知 N 是可解群．由 N 的极小性知 N 为一初等交换 p-群，$p\in\pi(G)$. 下面考虑 $\overline{G}=G/N$，A 通过自然地方式作用在 $\overline{G}$ 上．我们证明 $(\overline{G},A)$ 满足定理中关于 (G,A) 的全部假设条件，由于 $\pi(\overline{G})\subseteq\pi(G)$，容易证明 $12\nmid|\overline{G}|$ 以及 $A\in E^n_{\pi(\overline{G})}$ 及 A 有正规 $\pi(\overline{G})$-补．故只需证 $C_{\overline{G}}(A)=\overline{1}$. 设 $\overline{g}\in C_{\overline{G}}(A)$，则 $[g,A]\subseteq N$，从而 $\forall\ n\in N$，$a\in A$，有 $na^g=n(a^ga^{-1})a=n\cdot n_1a\in NA$，其中 $n_1=a^ga^{-1}\in[g,A]\subseteq N$. 即 $NA^g\leqslant NA$. 由于 $|NA^g|=|(NA)^g|=|NA|$，得出 $NA^g=NA$. 由于 $C_N(A)\leqslant C_G(A)=1$，知 $C_N(A^g)=C_{N^g}(A^g)=(C_N(A))^g=1$，$N\rtimes A=NA=NA^g=N\rtimes A^g$. 由于 A 有正规 $\pi(G)$-补 $A_{\pi(G)'}$ 且 A 有幂零的 Hall $\pi(G)$-子群，现在 $p\in\pi(G)$. 易推知 A 有正规 p-补 $A_{p'}$，$A=A_p\cdot A_{p'}$ 且 $A_{p'}\trianglelefteq A$. 令 $C=C_N(A_{p'})$，若 $C\neq1$，由[7]7.3 及 C 为 A_p-不变子群得 $C_C(A_p)\neq1$，从而 $C_C(A)\leqslant C_N(A)\neq1$，矛盾于 $C_N(A)=1$. 故必有 $C=1$. 由于 $N\cap A=1$，$[N_N(A_{p'}),A_{p'}]\leqslant N\cap A=1$，得 $N_N(A_{p'})=C_N(A_{p'})=1$. 从而得 $N_{NA}(A_{p'})=A$. 同理可得 $N_{NA^g}((A^g)_{p'})=A^g$. 由于 $A_{p'}$ 与 $(A^g)_{p'}$ 都是 NA 的 Hall p'-子群，由 Schur－Zassenhaus 定理 6.7[7]，存在 $n\in N$，$g_1\in A$，使得 $(A^g)_{p'}=(A_{p'})^{g_1n}=(A_{p'})^n$，从而 $A^g=N_{NA}((A^g)_{p'})=N_{NA}((A_{p'})^n)=(N_{NA}(A_{p'}))^n=A^n$，从而 $gn^{-1}\in N_G(A)$，$[gn^{-1},A]\leqslant G\cap A=1$. 即 $g_{n^{-1}}\in C_G(A)=1$，故 $g=n\in N$，即 $C_{\overline{G}}(A)=\overline{1}$. $(\overline{G},A)$ 满足定理中 (G,A) 的全部假设，由于 $N\neq1$，$|\overline{G}|+|A|<|G|+|A|$，由 G 的极小选取知 $\overline{G}$ 可解．N 可解从而 G 可解．矛盾．这说明 G 没有非单位的 A-不变的

正规真子群；特别地有 G 为非交换的特征单群．由熟知的结论知（3）成立．

（4）G 是非交换单群．

由（3），只需证 $k=1$．如果不然，设 $k>1$．令 $B=N_A(G_1)=\{a\in A \mid G_1^a=G_1\}$．显然 $1\in B$，由（3）有 $B<A$．令 $A=Ba_1+Ba_2+\cdots+Ba_n$ 为 B 在 A 中的陪集分解，其中 $1=a_1$、a_2，…，a_n 为陪集的全体代表元．因 G_1 是 G 的极小正规子群，$G_1^{a_i}$ 也是 G 的极小正规子群．$G_1^{a_i}\cap G_1^{a_j}\neq 1$ 当且仅当 $G_1^{a_i}=G_1^{a_j}$ 当且仅当 $a_ia_j^{-1}\in N_A(G_1)=B$，当且仅当 $a_i=a_j$．易知 $\langle G_1^a \mid a\in A\rangle=G_1^{a_1}\times G_1^{a_2}\times\cdots\times G_1^{a_n}$ 是 G 的 A-不变的非单位正规子群．由（3）知 $G_1^{a_1}\times G_1^{a_2}\times\cdots\times G_1^{a_n}=G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_k$．$B$ 作用在 G_1 上．$\pi(G_1)\subseteq\pi(G)$．A 有正规 $\pi(G)$-补易知 B 有正规 $\pi(G_1)$-补，又 $A\in E_{\pi(G)}^n$，由 Wielandt 定理[8]推出 $A\in D_{\pi(G)}$，由 Schur－Zassenhaus 定理[7]知 B 有 Hall $\pi(G)$-子群 $B_{\pi(G)}$，由 $A\in D_{\pi(G)}$ 知 $B_{\pi(G)}$ 共轭地含于 $A_{\pi(G)}$，从而 $B\in E_{\pi(G)}^n$，自然有 $B\in E_{\pi(G)}^n$，$12\nmid |G_1|$．若 $C_{G_1}(B)=1$，则（G_1，B）满足定理中（G_1，A）的全部假设，由于 $|G_1|+|B|<|G|+|A|$，由 G 的极小选取推出 G_1 可解．由（3）又得矛盾，故必有 $C_{G_1}(B)\neq 1$．取 $1\neq g_1\in C_{G_1}(B)$．我们令 $g=g_1\cdot g_1^{a_2}\cdots g_1^{a_n}$，易知 $g\neq 1$ 且 $g\in C_G(A)=1$，矛盾，故只能是 $k=1$，G 为单群．

（5）$G\cong S_z(2^{2n+1})$，n 为自然数．

事实上，由（4）及〔6〕定理 7.6.1 及奇阶群定理知 $4\mid |G|$，由 $12\nmid |G|$ 推出 $3\nmid |G|$，特别地 G 与 S_3 无关．由 Glauberman 推论 7.3[9]知 $G\cong S_z(2^{2n+1})$ 或 $G\cong PSL(2,3^{2n+1})$，n 为自然数，但 $12\nmid |G|$，又 $12\mid |PSL(2,3^{2n+1})|$，故 $G\cong S_z(2^{2n+1})$．

（6）$Inn(G)\cap A=1$．

因为 $Inn(G)\trianglelefteq Aut(G)$．由(4) $G\cong G/z(G)\cong Inn(G)$．记 $A_1=Inn(G)\cap A$，则 $A_1\trianglelefteq A$ 且 A_1 为 A 的一个 $\pi(G)$-子群．$A\in D_{\pi(G)}$ 推出 A_1 含于 A 的一个 Hall $\pi(G)$-子群 $A_{\pi(G)}$．$A_{\pi(G)}$ 幂零，由〔7〕4.1 知若 $A_1\neq 1$．则 $A_1\cap Z(A_{\pi(G)})\neq 1$．又因 A 有正规 $\pi(G)$-补 $A_{\pi(G)'}$，$A_1\cdot A_{\pi(G)'}=A_1\times A_{\pi(G)'}$．设若 $A_1\neq 1$，记 $A_2=A_1\cap Z(A_{\pi(G)})$，则 $1\neq A_2\leqslant Z(A)$．取 $1\neq I_g\in A_2$，其中 $I_g: x\mapsto x^g$，$\forall\, x\in G$．自然 $1\neq g$．对任意的 $a\in A$，一方面，由于 $I_g\in Z(A)$，有 $a^{-1}I_ga=I_g$；另一方面，由定义 $a^{-1}I_ga: x\mapsto (x^{a^{-1}}I_g)a=(g^{-1}x^{a^{-1}}g)a=(g^{-1})^axg^a=(g^a)^{-1}xg^a$，即 $a^{-1}I_ga=I_{g^a}$，这样就有 $\forall\, a\in A$，$I_g=I_{g^a}$，即 $g^ag^{-1}\in Z(G)=1$，从而 $g^a=g$，即 $1\neq g\in C_G(A)=1$．矛盾．故只能是 $A_1=Inn(G)\cap A=1$．

（7）反例不存在．

由(6)，$A\cong A/Inn(G)\cap A\cong A\cdot Inn(G)/Inn(G)\leqslant Aut(G)/Inn(G)=Out(G)$．又由(5)，$G\cong S_z(2^{2n+1})$．由〔10〕知 $Out(G)$ 同构子 G 的域自同构 F．F 循环．任取 $m\mid 2n+1$，$m\neq 2n+1$，易知 $S_z(2^m)$ 为 G 的 A-不变真子群．由(1)知 $S_z(2^m)$ 可解，故 $m=1$．这表明 $2n+1$ 为一个素数．由此得 A 为一个素数阶的无不动点自同构．由〔6〕10.2.1 知 G 可解，矛盾．

上述矛盾说明极小反例不存在．从而定理得证．

推论 1 设 G 为有限群，A 为 G 的作用群，$12\nmid |G|$，$C_G(A)=1$．如果$(|G|,|A|)=1$ 或 A 幂零，或 $A\cong S_3$ 之一成立，则 G 可解．

这个推论可分别导出〔4〕〔5〕的主要结论．

参 考 文 献

1 Gorenstein D. Finite Simple Groups. Putnan Press. 1984. 10～40
2 Wang Y. Acta Math Sinica, 1991, 7 (1): 62～65
3 Doyle J. J of Algebra, 1989, 127: 426～451
4 Wang Y. J of Math Res and Expos. 1990, 10 (1): 16～18
5 Parrott D. J Austral Math Soc, Series A 1990, 48: 384～396
6 Gorenstein D. Finite Groups. New York: Chelsea Press. 1980. 1～20
7 Kurzweil H. Endliche Gruppen. Springer-Verlag, 1977. 20～70
8 Wielandt H. Math Z. 1959, 71: 461～462
9 Glauberman G. CBMS Monograph 33. Amer Math Soc, 1977. 50～60
10 Suzuki M. Ann of Math. 1962, 75: 105～145

A Result on Fixed-point-free Automorphism Group

Wang Yanming *

Abstract We proved the following theorem by elementary argument.

Theorem: let G be a finite group and A be an operator group of G. Suppose that $12 \nmid |G|$ and $C_G(A)=e$. If A has a nilpotent Hall $\pi(G)$-subgroup and A is $\pi(G)$-nilpotent, then G is solvable.

Keywords Solvable group, Simple group, fixed-point-freely action

* Mathematics Department, Zhongshan University, Guangzhou 510275