

变压力场中气泡非线性振荡的数值模拟

张秀华

赵 健

(中山大学计算机系, 广州 510275) (中山大学应用力学与工程系)

摘 要 本文采用计及液体可压缩性的 Gilmore 方程作为气泡壁面运动的数学模型, 并用吉尔方法建立求解非线性常微方程组初值问题的计算程序。通过实例计算, 结果表明: 气泡在较大幅度的变化压力场中, 会发生十分显著的非线性振荡现象; 泡壁振荡幅度与压力场变化幅度、频率及指数脉冲宽度有关。

关键词 气泡, 非线性振荡

分类号 TV131.2

变化压力场的存在是气泡生长与溃灭的主要原因。例如, 在舰船螺旋桨区域, 泡的微核在低压处长大, 流向高压处迅速溃灭, 产生很大的冲击力损坏桨叶; 又如在超声清洗装置中, 声压力场周期性变化导致气泡胀大与收缩, 冲刷物体表面污迹。前者可近似用指数脉冲描述气泡到达高压区的环境压力场, 后者则用简谐函数表达。

Solmon & Plesset^[1]用 Rayleigh 方程求解了气泡在变化压力场中的非线性振荡响应。但这一模型中不考虑液体的可压缩性, 在泡壁运动马赫数较大或振荡频率较高时不够精确。文献 [2, 3] 中作者专门对此进行了研究, 并指出 Gilmore 方程^[4]在上述条件下是足够精确的。因此, 为了研究气泡在指数变化压力场或简谐变化压力场中的振荡特性, 本文采用 Gilmore 方程进行数值模拟。

1 基本方程

Gilmore 在 Kirkwood-Bethe 假设的基础上导出了泡壁运动方程^[4]。

$$R\ddot{R}\left(1-\frac{\dot{R}}{C}\right)+\frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{1}{3}\frac{\dot{R}}{C}\right)=H\left(1+\frac{\dot{R}}{C}\right)+\frac{RH}{C}\left(1-\frac{\dot{R}}{C}\right) \quad (1)$$

其中, R , \dot{R} , \ddot{R} 分别为泡壁处的半径、速度和加速度; C 为泡壁处声速; H , \dot{H} 分别为泡壁与无穷远处的焓差及其时间变化率。

对于多种液体, 等熵压缩试验的压力~密度关系, 均接近于经验性的非线性关系式

收稿日期: 1994-06-15

$$(P+B) / (P_0+B) = (\rho/\rho_0)^n \quad (2)$$

对于水, $B \approx 3000$ 个大气压, $n=7.0$. $P_0=1$ 个大气压, $\rho_0=1000 \text{ kg/m}^3$.

设泡壁处液体一侧的压力为 P_L , 则

$$H = \int_{P_\infty}^{P_L} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{n}{(n-1)} \frac{(P_0+B)}{\rho_0} \left[\left(\frac{P_L+B}{P_0+B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{P_\infty+B}{P_0+B} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \quad (3)$$

$$C = \left(\frac{n}{\rho_0} (P_0+B) \right)^{1/2} \left(\frac{P_L+B}{P_0+B} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \quad (4)$$

若泡内气体经历绝热压缩过程, 则

$$P_L = P_{\infty 0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} \quad (5)$$

式中, $P_{\infty 0}$ 为泡内气体初始压力; γ 为气体的绝热指数; σ 为气液分界面表面张力系数; μ 为液体的粘性系数.

简谐变化压力场环境压力为

$$P_\infty(t) = P_0(1 + A \sin \omega t) \quad (6)$$

指数变化压力场为

$$P_\infty(t) = P_0(1 + A e^{-t/t_0}) \quad (7)$$

式中, A 为压力场的变化幅度; ω 为简谐变化频率; t_0 为指数衰减变化的特征时间.

2 数值模拟

上述建立的数学模型, 属两阶非线性常微分方程组. 文献 [5] 中介绍了吉尔方法及其计算程序. 其积分步长可预先给定, 但在积分过程中可以自动地在最小步长 H_{\min} 和最大步长 H_{\max} 之间放大或缩小, 以便使积分步长尽可能地大, 且在欧几里得模的意义下单步误差不大于给定的误差界.

该程序能自动选取阶, 尽可能地节省积分的计算时间. 对一个 4 个未知量的一阶非线性方程组作了实例计算 (见文献 [5]), 在自变量 $t=5.000043285$, 计算得未知量 $y_1 = -5.083101190$, 与精确解 -5.083089922 之间相对误差为 1.12×10^{-6} (设定相对误差为 10^{-6} , 很接近).

在本文计算中, 取相对误差 $EPS=10^{-6}$; 选用阿当姆期预估——校正法, 令 $\text{Maxder}=8$ (该方法中允许使用的导数的最大阶次), 用 FORTRAN 语言编程计算.

对水中气泡振荡响应进行计算, 各个参数的选取如下:

$$\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad n = 7.0$$

$$P_0 = 1.012928 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$R_0 = 10^{-4} \text{ m}, \quad \sigma = 0.0728 \text{ N/M}$$

$$\gamma = 1.4, \quad \mu = 0 \text{ (忽略水的粘性项)}$$

$t=0$ 时, $R=R_0$, $P_L=P_0$, 则由 (5) 式得

$$P_{\infty 0} = P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (8)$$

在任一时刻有

$$P_L = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} \quad (9)$$

令

$$x_1 = \frac{P_L + B}{P_0 + B}, \quad x_2 = \frac{P_\infty + B}{P_0 + B}$$

$$A_1 = x_1^{6/7}, \quad A_2 = x_2^{6/7}$$

则从 (3) 式得到

$$H = \frac{7}{6} \frac{P_L - P_\infty}{\rho_0} \frac{x_1^5 + x_1^4 x_2 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1 x_2^4 + x_2^5}{A_1^6 + A_1^5 A_2 + A_1^4 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 + A_1^2 A_2^4 + A_1 A_2^5 + A_2^6} \quad (10)$$

则 Gilmore 方程式 (1) 可化为一常微分方程组的初值问题进行求解, 令 $U = \dot{R}$, 即

$$\frac{dR}{dt} = U \quad (11)$$

$$\frac{dU}{dt} = \left\{ H \left(1 + \frac{U}{C}\right) + \frac{U}{C \rho_L} \left(1 - \frac{U}{C}\right) \left[-3\gamma P_{s0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + \frac{2\sigma}{R} \right] - \frac{1}{\rho_L} \frac{dP_\infty}{dt} \frac{R}{C} \left(1 - \frac{U}{C}\right) - \frac{3}{2} U^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{U}{C}\right) \right\} / R \left(1 - \frac{U}{C}\right) \quad (12)$$

设初始时刻泡壁处于静止, 则

$$t=0, \quad R=R_0, \quad U=0.0.$$

由以上推导编程实践中, 发现按 (3) 式直接求 H 导致死循环, 这是因为 $P_L, P_0 \ll B$ 时, (3) 式中两相减项均接近 1, 由于数值计算中有限字长截取, 造成了极大的误差. 在改用 (10) 式之后, 解决了这个问题.

3 数值模拟实例

(1) 简谐变化压力场

表 1 简谐变化压力场中气泡非线性振荡响应特征

Tab. 1 Characteristics of bubble nonlinear oscillations in harmonic pressure field

项目	幅度 A (大气压)	角频 (1/s)	振荡特点
状况 1	0.5	10^5	振荡幅度较大, 非线性明显
状况 2	0.5	2.092×10^5	振荡幅度率最大, 接近线性共振频率
状况 3	0.5	3×10^5	振荡幅度较小, 有明显的非线性
状况 4	0.8	10^5	振荡幅度很大, 非线性强

表 1 中 1, 2, 4 三种状况的振荡波形图分别见图 1, 2, 3. 从图中可见, 气泡对简谐变化压力场的响应是一个复杂的非线性振荡过程. 初始阶段为过渡区. 由于非线性作用, 在过渡区后不会象线性振荡一样成为单一频率振荡的简谐波; 它的波幅呈复杂变化, 波形峰部钝而谷部尖锐. 即气泡在受到压缩回弹瞬间, 运动变化最为激烈.

图 2 表明接近于线性振荡共振频率 ($\omega_r = 2.092 \times 10^5$ (1/s)), 振荡幅度明显加大. 因此在超声雾化设备研制中, 有必要针对气泡共振点选择激励频率, 达到最佳清洗效果.

图 1 和图 3 频率相同, 但后者压力场幅度大, 持振荡响应明显加强.

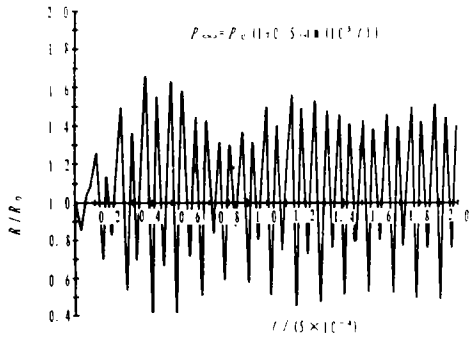


图 1 $A=0.5, \omega=10^5$ 时泡壁半径的响应
Fig. 1 Response of bubble radius at $A=0.5, \omega=10^5$

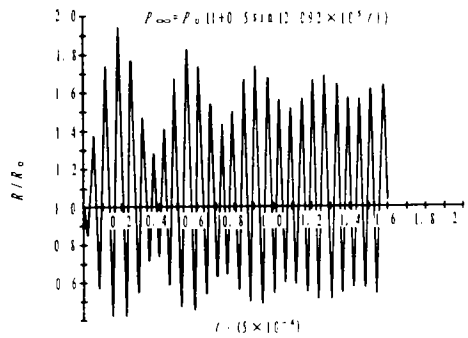


图 2 $A=0.5, \omega=\omega_r=2.092 \times 10^5$ 时泡壁半径的响应
Fig. 2 Response of bubble radius at $A=0.5, \omega=\omega_r=2.092 \times 10^5$

(2) 指数变化压力场

表 2 指数变化压力场中气泡非线性振荡响应特征

Tab. 2 Characteristics of bubble nonlinear oscillations in exponential pressure field

项目	幅度 A (大气压)	特征时间 t_0 (s)	振荡特点
状况 1	5	4×10^{-6}	振幅最小, 经历一段非线性区后, 近似线性衰减
状况 2	10	2×10^{-6}	振幅中等, 经历一段非线性区后, 近似线性衰减
状况 3	20	10^{-6}	振幅最大, 经历一段线性区后, 近似线性衰减

表 2 中状况 3 的图形在图 4 中给出, 状况 1, 2 的图形与图 4 相似, 只是幅度大小有差别。

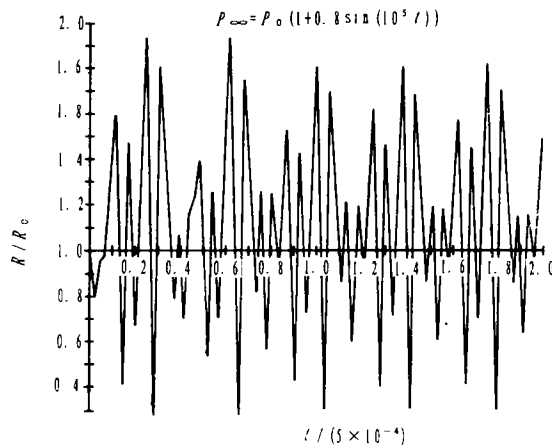


图 3 $A=0.8, \omega=10^5$ 时泡壁半径的响应
Fig. 3 Response of bubble radius at $A=0.8, \omega=10^5$

比较这 3 种情况, 表明指数脉冲幅度越大, 作用时间越短 (即尖锐性强), 则其振荡响应越强. 从图 4 中可见, 在起始阶段存在着一段非线性过渡过程; 其后, 出现呈指数衰减的波动图形, 且频率与线性振荡情形基本上相同. 是一种衰减的自由振荡模式.

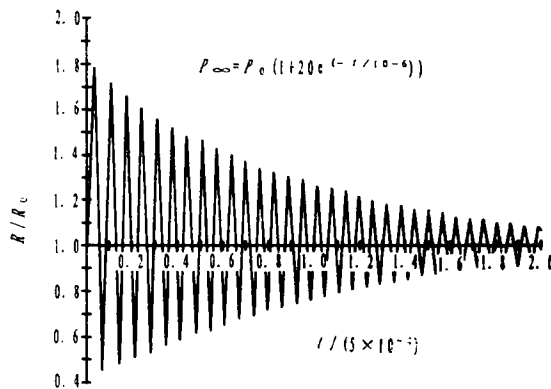


图 4 $A=20$, $t_0=10^{-6}$ 时泡壁半径的响应

Fig. 4 Response of Bubble Radius at $A=20$, $t_0=10^{-6}$

说明: 图 1~4 中, $R/R_0 \sim t$ 的关系曲线, 泡壁半径 R 是通过数值模拟计算得到的. 如果配备有高速度摄影装置就可以用实验测出泡的半径, 见文献 [2].

4 结 论

气泡对变化压力场的响应是一种非线性的振荡过程. 在简谐变化压力场中, 当压力场变化频率接近于气泡固有频率时, 振荡响应的幅度最大; 当压力场幅度加大, 则气泡振荡响应幅度也会上升, 且非线性特征加强. 在指数变化压力场中, 脉冲形状愈是尖锐, 气泡振荡响应愈强; 在一定时间后, 气泡近似以其线性振荡的固有频率作衰减振荡.

参 考 文 献

- 1 Solomon L P, Plesset M S. Nonlinear Bubble Oscillations, Jan. 1967
- 2 [美] 柯乃普 RT 等著. 空化与空蚀: 第四章, 瞬态空穴机理, 水利水电科学研究院译. 北京, 水利出版社, 1981. 65~70
- 3 赵键等. 可压缩液体中球形泡泡壁运动的研究. 上海交通大学学报, 1989, 23 (1): 91~95
- 4 赵键等. 关于空泡动力学方程精确度的分析. 中山大学学报(自然科学版), 1994, 33 (1): 13~18
- 5 刘德贵等编. Fortran 算法汇编 (第一分册), 北京: 国防工业出版社, 1984

Numeric Analog on Nonlinear Oscillation of Bubbles in Pressure Changing Fluid Field

*Zhang Xiuhua * Zhao Jian*

Abstract In this paper the Gilmore's equation for the fluid compressibility is employed as the mathematical model for bubble wall motion, and Gill's method is also used to compile the programs to solve initial value problems of nonlinear differential equations. A number of examples for harmonic or exponential pressure changing field show that the nonlinear oscillation is strong in a high pressure changing field; the bubble wall oscillating amplitude is concerned with varying amplitude, frequency and width of exponential pulse of pressure field.

Keywords bubble, nonlinear oscillation

* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275