第 34 卷 第 2 期
1995 年 4 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 34 No. 2
Apr. 1995

关于带跳反射扩散过程的下鞅问题及其应用

丁 灯
(中山大学数学系，广州 510275)

摘 要 提出一个联系于一类在上半空间上带泊松跳的反射扩散过程的下鞅问题，并在一组较弱的条件之下证明该下鞅问题的解的存在性. 进而讨论了这一类下鞅问题的解与一类在上半空间上具有反射边界的带泊松跳的随机微分方程的解的关系，并在一定的条件下证明了这两种解的一种等价关系.

关键词 鞅，下鞅问题，随机微分方程
分类号 O211.63

1 下鞅问题的提出

所谓鞅问题方法是由 Stroock 和 Varadhan 首先提出的一种用鞅理论来研究随机微分方程的理论和方法，在随机分析的许多方面，如扩散过程的构造，随机控制等有着广泛的应用[1,2]. 为了研究具有反射边界的随机微分方程，文〔3〕还提出了所谓的下鞅问题. 这里，主要根据在连续情形下的下鞅的思想，我们将提出一个联系一类带跳扩散过程的下鞅问题.

设 $d \geqslant 2$，R^d 为 d 维的欧氏空间，D 为 R^d 的上半空间，即 $D = \{x = (x^1, \cdots x^d) \in R^d, x^d \geqslant 0\}$；$\partial D = \{x \in R^d;\ x^d = 0\}$ 为 D 的边界；$Z = R^d \backslash \{0\}$. 假设 $a(t,x) = (a_{ij}(t,x))_{i,j=1}^d$；$b(t,x) = (b_i(t,x))_{i,j=1}^d$；$c(t,x,z) = (c_i(t,x,z))_{i,j=1}^d$ 分别为 $(t,x) \in R_+ \times R^d$ 和 $(t,x,z) \in R_+ \times R^d \times Z$ 的 Borel 可测函数. 对任一 R^d 上的光滑函数 f，我们记

$$\begin{aligned} L_t f(x) = & \sum_{ij=1}^d a_{ij}(t,x)\partial_{ij} f(x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x)\partial_i f(x) \\ & + \int_Z [f(x + c(t,x,z)) - f(x) - \sum_{i=1}^d c_i(t,x,z)\partial_i f(x)] m(\mathrm{d}z) \end{aligned} \tag{1}$$

这里 $\partial_{ij} f(x) = \partial f(x)/\partial x^i \partial x^j$，$\partial_i f(x) = \partial f(x)/\partial x^i$，$m(\mathrm{d}z)$ 为 $(Z, \mathscr{B}(Z))$ 上的 σ-有限测度，使得对任一集合 $A \in \mathscr{B}(Z)$（Z 上的 Borel 可测集族），如果 $\overline{A} \cap \{0\} = \varnothing$ 有 $m(A) < \infty$.

收稿日期：1993-09-10

定义1 设$x \in D$,如果存在一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, P_x)$和一$D$-值的右连左极$(\mathscr{F}_t)$-适应过程$X_t$,使得$P_x(X_0 = x) = 1$且对任一函数$f \in C_0^\infty(R^d)$,同时$\partial_d f(x)|_{\partial D} \geqslant 0$,有

$$X_t(f) \triangleq f(X_t) - f(x) - \int_0^t Lsf(X_s)\mathrm{d}s \qquad (2)$$

是$(P_x, \mathscr{F}_t)$下鞅. 则称(X_t, P_x)是关于$L_t(a,b,c)$的以x为初值的下鞅问题的解.

关于下鞅问题的解,我们不难证明如下的命题(详见〔4〕). 以下我们总假设所有的概率空间满足通常的条件(见〔5〕).

命题1 设(X_t, P_x)为一下鞅问题的解,且函数a,b,c满足如下的条件:存在常数$K_1 > 0$使对任意$(t,x) \in R_+ \times R^d$,在通常的向量及矩阵的范的意义下,有

$$|b(t,x)|^2 + \|a(t,x)\|^2 + \int_z |e(t,x,z)|^2 m(\mathrm{d}z) \leqslant K_1 \qquad (3)$$

则(1)对任一$f \in C_b^2(R^d)$且$\partial_d f(x)|_{\partial D} \geqslant 0$及$\varphi(x) = x^d$, $X_t(f)$及$X_t(\varphi)$都为(DL)类下鞅[6];(2)对任意的$i = 1,2\cdots d-1$,记$\psi(x) = x^i$, $X_t(\psi)$为一鞅.

设$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$为一概率空间. 其上定义了一标准$d$-维$(\mathscr{F}_t)$-布朗运动$(B_t)_{t\geqslant 0}$和一以$m(\mathrm{d}z)$为特征测度的平稳泊松点过程$p_t$, p_t与B_t相互独立. 记$p(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$为由$p_t$产生的随机测度,$q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z) = p(\mathrm{d}t, \mathrm{d}z) - \mathrm{d}tm(\mathrm{d}z)$为相应的鞅测度. 下面,我们考虑一类$D$上的随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = b(t,X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\mathrm{d}B_t + \int_z c(t,X_t,z)q(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z) + r(X_t)\mathrm{d}\xi_t \qquad (4)$$

及其反射边界条件:

$$对\ \forall\ t \geqslant 0, \int_0^t X_s^d \mathrm{d}\xi_s^c = 0, 如果\ \Delta\xi_t(w) > 0, \Delta\xi_t(w) = 2X_t^d(w) \qquad (5)$$

这里,$X_t = (X_t^1, \cdots X_t^d)$为一$D$-值的右连左极适应过程;$\xi_t$为一零初值的适应的右连左极单调增过程,$\Delta\xi_t(w) = \xi_t(w) - \xi_{t-}(w)$, $\xi_t^c(w) = \xi_t(w) - \sum_{s\leqslant t}\Delta\xi_s(w)$; $\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))_{i,j=1}^d$, b和c如上所定义,$r(x) = (0,\cdots 0,1) \in R^d$.

记$a(t,x) = \frac{1}{2}\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$($\sigma^T$为$\sigma$的转置),如果随机微分方程(4)存在解$(X_t, \xi_t)$满足初始条件$X_0 = x \in D$及边界条件(5),并且$\xi_t$为连续的增过程,应用Ito公式,可知$(X_t, P)$是关于$L_t(a,b,c)$以$x$为初值的下鞅问题的解. 因此,为了讨论下鞅问题的存在性,我们先转而考虑方程(4)的解的存在性问题.

定理1 如果函数σ,b,c满足有界性条件(3)及李氏连续条件:存在常数$K_2 > 0$,使得对$\forall\ t \in R_+\ x, y \in R^d$,有

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leqslant K_2|x-y|^2 \qquad (6)$$

$$\int_z |c(t,x,z) - c(t,y,z)|^2 m(\mathrm{d}z) \leqslant K_2|x-y|^2 \qquad (7)$$

则对任一概率空间及其上的布朗运动和泊松点过程B_t及p_t,方程(4)唯一地存在一以$x \in D$为初值的满足边界条件(5)的解(X_t, ξ_t). 进一步,如果c还满足条件,对$\forall\ x \in D$, $\forall\ (t,z) \in R_+ \times Z$.

$$x^d + c_d(t,x,z) \geqslant 0 \qquad (8)$$

则其解中的 ξ_t 是一连续的增过程.

定理的证明主要应用经典的逐次逼近法及〔7〕中一个关于间断函数 Skorokhod 问题解的结果，详细证明可见〔4〕.

2　下鞅问题解的存在性

这里将在较弱的条件下讨论下鞅问题解的存在性. 首先我们需要下面的两个引理.

引理 1　设函数 σ,b,c 满足有界性条件(3)，(X_t,ξ_t) 为方程(4)的一个满足边界条件(5)的解，则对 $\forall\ T>0$，存在常数 $K_T>0$. 使得对任意 $s,t\in[0,T]$，当 $Y_t=X_t$ 或 ξ_t 时

$$E[|Y_t-Y_s|^2]\leqslant K_T|t-s| \tag{9}$$

应用 Ito 公式及 Gronwall 不等式，不难证明这一引理，下一引理是关于方程(4)的 Krylov 估计，其证明及〔8〕中相应的 Krylov 估计相同.

引理 2　在引理 1 的假设下，如果 σ 还满足条件：存在常数 K_0，使得对 $\forall\ t\geqslant 0,x,y\in R^d$.

$$K_0|y|^2\leqslant y\sigma(t,x)\sigma(t,x)^Ty^T \tag{10}$$

则对 $\forall\ p\geqslant d+1$ 及 $T>0$,存在一常带数 K_3,对任一 $R_+\times R^d$ 上的 Borel 可测函数 f,有

$$E(\int_0^T f(s,X_s)\mathrm{d}s)\leqslant K_3\|f\|_p \tag{11}$$

这里，$\|f\|_p=(\int_0^T\int_{R^d}|f(s,x)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}s)^{1/p}$.

定理 2　设 $m(\mathrm{d}z)=\mathrm{d}z/|z|^{d+1}$，函数 σ,b,c 满足条件(3)，σ 满足非退化条件(10)且为对称非负定方阵函数，c 满足条件(7)及(8). 记 $a(t,x)=\dfrac{1}{2}\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$，则对任一 $x\in D,T>0$,在$[0,T]$上存在一关于 $L_t(a,b,c)$ 的以 x 为初值的下鞅问题的解.

证明　类似于〔8〕的证明，我们可以选取一光滑的函数列(σ^n,b^n)一致地满足有界性条件(3)及非退化条件(10)，同时，对 $n=1,2,3\cdots$，有

$$\|tr(\sigma-\sigma^n)(\sigma-\sigma^n)^T\|_{d+1}\leqslant 2^{-n},\ \||b-b^n|\|_{d+1}\leqslant 2^{-n} \tag{12}$$

另一方面，我们还可证明存在一概率空间$(z,\mathscr{F},P)$及其上的一列随机过程$(X_t^n,\xi_t^n,B_t^n,P_t^n)$和过程$(X_t,\xi_t,B_t,P_t)$满足如下的性质：

(i) 记 $\mathscr{F}_t^n=\sigma\{X_s^n,\ \xi_s^n,\ B_s^n,\ P_s^n;\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ 及 $\mathscr{F}_t=\sigma\{X_s,\ \xi_s,\ B_s,\ P_s;\ 0\leqslant s\leqslant t\}$，则 B_t^n，B_t 分别为$(\mathscr{F}_t^n)$及$(\mathscr{F}_t)$的布朗运动，P_t^n，P_t 分别为以 $m(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$ 为特征测度的泊松点过程(其鞅测度分别记为 $q^n(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}z)$ 和 $q(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}z)$)；

(ii) X_t^n 为右连左极的 D-值过程，ξ_t^n 为连续的增过程，且$(X_t^n,\ \xi_t^n,\ B_t^n,\ P_t^n)$满足以 σ^n，b^n，c^n 为系数的方程(4)及边界条件(5)；

(iii) 记 $Y_t^n=X_t^n$ 或者 ξ_t^n，即 Y_t^n 一致地满足条件(9)，且满足如下两式：

$$\lim_{M\to+\infty}\sup_n P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^n|>M\}=0 \tag{13}$$

和对 $\forall\ \epsilon>0$.

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_n\sup_{\substack{|t-s|<\delta\\ s,t\in[0,T]}}P\{|Y_t^n-Y_s^n|>\epsilon\}=0 \tag{14}$$

(iv) 对 $\forall\ 0\leqslant t\leqslant T$，$(X_t^n,\ \xi_t^n,\ B_t^n,\ P_t^n)$ 依概率收敛于 $(X_t,\ \xi_t,\ B_t,\ P_t)$；

(v) $(X_t,\ \xi_t,\ B_t,\ P_t)$ 满足以 $\sigma,\ b,c$ 为系数的方程(4)，且 X_t 为右连左极的 D-值过程，ξ_t 为连续的增过程.

下面证明 (X_t,ξ_t) 同时也满足边界条件(5)，为此往证对 $\forall\ 0\leqslant t\leqslant T$，$\int_0^t (X_s^n)^d \mathrm{d}\xi_s^n$ 依概率收敛于 $\int_0^t X_s^d \mathrm{d}\xi_s$.

由分部随机积分公式

$$\int_0^t \varphi_s \mathrm{d}\psi_s = \varphi_s\psi_s - \int_0^t \psi_s \mathrm{d}\varphi_s \text{ 及 } \int_0^t \psi_s \mathrm{d}\psi_s = \frac{1}{2}\psi_t^2$$

这里，$\varphi_t=(X_t^n)^d$ 或 X_t^d，$\psi_t=\xi_t^n$ 或者 ξ_t，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t (X_s^n)^d \mathrm{d}\xi_s^n - \int_0^t X_s^d \mathrm{d}\xi_s\right| \leqslant \left|(X_t^n)^d\xi_t^n - X_t^d\xi_t\right| \\
&\quad + \left|\int_0^t \xi_s^n b_d^n(s,X_s^n)\mathrm{d}s - \int_0^t \xi_s b_d(s,X_s)\mathrm{d}s\right| \\
&\quad + \left|\int_0^t \sum_{j=1}^d \xi_s^n \sigma_{d_j}^n(s,X_s^n)\mathrm{d}B_j^n(s) - \int_0^t \sum_{j=1}^d \xi_s \sigma_{dj}(s,X_s)\mathrm{d}B_j(s)\right| \\
&\quad + \left|\int_0^t\int_z \xi_s^n C_d(s,X_s^n,z)q_n(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z) - \int_0^t\int_z \xi_s C_d(s,X_s,z)q(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\left|(\xi_t^n)^2 - \xi_t^2\right| \triangleq I_1+I_2+I_3+I_4+I_5
\end{aligned}\tag{15}$$

由性质(iv)及(13)可得：I_1 及 I_5 依概率收敛于 0. 对于 I_2，取一固定的 N，有：

$$\begin{aligned}
I_2 \leqslant &\left|\int_0^t (\xi_s^n b_d^N(s,X_s^n) - \xi_s b_d^N(s,X_s))\mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^t (\xi_s^n b_d^n(s,X_s^n) - \xi_s^n b_d^N(s,X_s^n))\mathrm{d}s\right| \\
&+ \left|\int_0^t (\xi_s b_d^N(s,X_s) - \xi_s b_d(s,X_s))\mathrm{d}s\right| \triangleq J_1+J_2+J_3
\end{aligned}$$

由 ξ_t 的单调性及 b_d^N 的光滑有界性，存在常数 $c_1,\ c_2$，使得 $J_1\leqslant c_1\int_0^t|\xi_s^n-\xi_s|\mathrm{d}s + c_2\xi_t\int_0^t|X_s^n - X_s|\mathrm{d}s$，于是由性质(iii)及性质(iv)，可证明 J_1 依概率收敛于 0. 另一方面，$J_2\leqslant \xi_t^n\int_0^t|b_d^n(s,X_s^n) - b_d^N(s,X_s^n)|\mathrm{d}s$，于是由性质(iii)，应用 Krglov 估计(引理 2)及(12)不难证得 J_2 也依概率收敛于 0. 同理，可证得 J_3 依概率收敛于 0，即 I_2 依概率收敛于 0.

对于 I_3，I_4，如[8]中定理 2.1 的证明相似，应用如上的处理方法，可证得 I_3，I_4 也依概率收敛于 0. 从而证明了 $\int_0^t (X_s^n)^d \mathrm{d}\xi_s^n$ 依概率收敛于 $\int_0^t X_s^d \mathrm{d}\xi_s$. 于是由性质(ii)可知 $(X_t,\ \xi_t)$ 也满足边界条件(5).

应用 Ito 公式，马上可知 $(X_t,\ P)$ 为相应的下鞅问题的解，证明完毕.

3 在随机微分方程上的应用

下面将讨论一个相反的问题，即通过下鞅问题的解来寻找方程(4)在条件(5)下的解(弱解).

以下假设 $(X_t,\ P_x)$ 是以 $x\in D$ 为初值的关于 $L_t(a,b,c)$ 下鞅问题的解，其中函数 a，b,c 满足条件(3)及(8)，而且还假设，在 P_x 之下，X_t 是拟左连续的(其定义见[5]).

由 X_t 的拟左连续性及命题 1，应用下鞅的分解理论（详见〔5,9〕），有如下的表示：

$$X_t = x + M_t^c + \int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t\int_z zq_x(\mathrm{d}x,\mathrm{d}z) + \int_0^t r(X_s)\mathrm{d}\xi_s \tag{16}$$

这里，ξ_t 为一连续的适应增过程，M_t^c 为一连续鞅，$q_x(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 为对应于 X_t 的跳测度 $P_x(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 的鞅测度.

命题 2　在上述的假设之下，对任意 $t>0$，有

$$\int_0^t X_s^d \mathrm{d}\xi_s = 0 \tag{17}$$

证明　等价地，将证明 $\int_0^t I_{\dot{D}}(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$，这里 $\dot{D} = D\backslash\partial D$，为此，我们往证，对任一紧集 $K\subset\dot{D}$，有 $\int_0^t I_k(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$.

记 $\tau_0 = \inf\{s\geqslant 0;\ X_s\in K\}\wedge t$；$\tau_{2n+1} = \inf\{s\geqslant\tau_{2n};\ X_s\in\partial D\}\wedge t$；$\tau_{2n} = \inf\{s\geqslant\tau_{m-1};\ X_s\in K\}\wedge t$. 则 τ_n 为停时，且 $\tau_t\uparrow t$. 取 O_i 为一串有界开集，使得 $K\subset O_i\subset\overline{O}_i\subset O_{i+1}\subset\dot{D}$ 且 $\dot{D}=\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i$. 另取函数 $g_i\in C_0^\infty(R^d)$ 使得 $0\leqslant g_i(x)\leqslant 1$，而且当 $x\in O_i$，$g_i(x)=1$；当 $x\in R^d\backslash O_{i+1}$，$g_i(x)=0$. 取 $\varphi_i(x)=x^d\cdot g_i(x)$ 则当 $x\in\partial D$ 时，$\partial_d\varphi_i(x)=0$，从而由命题 2，$X_t(\varphi_i)$ 为一鞅.

对任一固定的 $n\geqslant 0$，取 $\tau_{2n}^i = \inf\{s\geqslant\tau_{2n},\ X_s\overline{\in}O_i\}\wedge t$，则 τ_{2n}^i 为停时，且由于 X_t 的拟左连续性，可证得 $\tau_{i2n}\uparrow\tau_{2n+1}$（当 $i\to\infty$）. 另一方面，当 $(s,w)\in[\tau_{2n},\ \tau_m^i]$ 时，$X_s(w)\in O_i$ 从而 $\varphi_i(X_s(w)) = X_s^d(w)$，于是由(2)及(16)，分别得（以下为简单起见，记 $\tau^i=\tau_{2n}^i$）

$$\begin{aligned}X_{s\wedge\tau^i}(\varphi_i) - X_{s\wedge\tau_{2n}}(\varphi_i) &= X_{s\wedge\tau^i}^d - X_{s\wedge\tau_{2n}}^d - \int_{s\wedge\tau_{2n}}^{s\wedge\tau^i} b_d(r,X_r)\mathrm{d}r\\ &\quad - \int_{s\wedge\tau_{2n}}^{s\wedge\tau^i}\mathrm{d}r\int_z (X_r^d + C_d(r,X_r,z))(g_i(X_r + C(r,X_r,z)) - 1)m(\mathrm{d}z)\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}X_{s\wedge\tau^i}(\varphi_i) - X_{s\wedge\tau_{2n}}(\varphi_i) - (\xi_{s\wedge\tau_i} - \xi_{s\wedge\tau_{2n}}) &= X_{s\wedge\tau^i}^d - X_{s\wedge\tau_{2n}}^d - \int_{s\wedge\tau_{2n}}^{s\wedge\tau^i} b_d(r,X_r)\mathrm{d}r\\ &\quad - (\xi_{s\wedge\tau^i} - \xi_{s\wedge\tau_{2n}})\end{aligned} \tag{19}$$

都为 $(P_x,\mathscr{F}_s)$ 一鞅，故得 $Y_s = (\xi_{s\wedge\tau^i} - \xi_{s\wedge\tau_m}) - \int_{s\wedge\tau_{2n}}^{s\wedge\tau^i}\mathrm{d}r\int_z (X_r^d + C_d(r,X_r,z)(g_i(X_r + C(r,X_r,z)) - 1)m(\mathrm{d}z)$ 为一连续的有限变差可积鞅，且为零初值，故得 $Y_s\equiv 0$，但由条件(8)及 g_i 的取法，有

$$(X_r^d + C_d(r,X_r,z))(g_i(X_r + C(r,X_r,z)) - 1)\leqslant 0$$

故得 $\xi_{s\wedge\tau^i} - \xi_{s\wedge\tau_{2n}} = 0$ 或者 $\int_{\tau_{2n}}^{\tau^i} I_k(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$. 令 $i\to\infty$ 得 $\int_{\tau_{2n}}^{\tau_{m+1}^-} I_k(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$. 另一方面，我们显然有 $\int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}^-} I_k(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$. 从而有 $\int_0^t I_k(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$. 令 $K\to\dot{D}$，即可证得 $\int_0^t I_{\dot{D}}(X_s)\mathrm{d}\xi_s = 0$，证毕.

另一方面，对任一函数 $f\in C_b^2(R^d)$，令 $\bar{f}(x) = f(x) + \alpha x^d$，取足够大的 α 使 $\partial d\bar{f}(x)|_{\partial D}\geqslant 0$，于是根据命题 1 及(16)存在唯一连续有限变差适应过程 $\xi_t(f)$，使得

$X_t(f)-\xi_t(f)$ 为一鞅.

命题 3 设 U 为 $x\in\partial D$ 的一个邻域，如果 $f\in C_b^2(R^d)$ 使得在 $U\cap\partial D$ 上 $\partial_d f(x)\geqslant 0$，则有 $\int_0^t I_U(X_s)\mathrm{d}\xi_s(f)\geqslant 0$.

证明 设开集 N 满足 $\overline{N}\subset U$，取 $g\in C_b^2(R^d)$ 使 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，且当 $x\in N$，$g(x)=0$；$x\in R^d\backslash U$，$g(x)=1$. 记 $\overline{g}=\alpha g x^d$，则可取足够大的 α，使得 $\overline{f}(x)=f(x)+\overline{g}(x)$ 在 ∂D 上有 $\partial d\overline{f}(x)\geqslant 0$. 从而存在增过程 $\xi_t(\overline{f})$ 使得 $X_t(f)-\xi_t(\overline{f})$ 为鞅，且有 $\xi_t(f)=\xi_t(\overline{f})-\xi_t(\overline{g})$. 同时用类似于命题 2 的证明，可得 $\int_0^t I_N(X_s)\mathrm{d}\xi_s(\overline{g})=0$. 从而有 $\int_0^t I_N(X_s)\mathrm{d}\xi_s(f)=\int_0^t I_N(X_s)\mathrm{d}\xi_s(\overline{f})\geqslant 0$，令 $N\to U$ 则命题得证.

应用命题 2 和 3，用类似于〔1〕第二章定理 3.1 的证明，可得下面的定理.

定理 3 对任一函数 $f\in C_b^2(R^d)$，有：

$$\xi_t(f)=\int_0^t \partial_d f(X_s)\mathrm{d}\xi_s \tag{20}$$

对任意一函数 $f\in C_b^2(R^d)$. 根据定理 3，我们有 $X_t(f)-\int_0^t\partial_d f(X_s)\mathrm{d}\xi_s$ 为一$(P_x,\mathscr{F}_t)$鞅，于是取 $f(y)=e^{i<\theta,y-x>}$ 及应用〔6〕中的鞅表示定理类似于〔10〕中的相应证明方法，不难证得，(X_t,ξ_t) 满足方程(4). 另一方面，命题 2 说明了 (X_t,ξ_t) 满足边界条件(5)，因此可得如下的定理.

定理 4 如果 $a(t,x)=\frac{1}{2}\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T$. 则随机微分方程(4) 存在一以 x 为初值的满足边界条件(5) 的解(弱解).

作者在完成本文的过程中，受到司徒荣教授的多次有益的指导和帮助，深表感谢.

参 考 文 献

1 Bensoussan A, Lions J L. Impules control and quasi - variational Inequalities, Gauthier - villars, Paris, 1984

2 Strook D W, Voradhan S R S. Multidimensional diffusion processes, Springer — verlag, 1979

3 Strook D W, Varadhan S R S. Diffusion processes with boundary conditions, Comm Pure Appl Math 1971,24:147 ~ 225

4 丁灯.上半空间上带泊松跳的扩散过程及最优随机控制问题，硕士论文，中山大学数学系，1988

5 严加安.鞅与随机积分引论，上海:上海科技出版社，1981

6 Ikeda N, Watanahe S. Stochastic differential equations and diffusion proeesses, North - holland, 1981

7 Maurel M C, Karoui N E, Marchal B. Reflexion discontinue et systemes stochastiques, Ann Prolul, 1980,8:1049 ~ 1067

8 Anulovn S V, Pragarauskas H. On strong markov weak solntions of stochastie equations, Lietuvos matem. rink17, 5 ~ 26

9 何声武，汪嘉冈.独立增量过程的鞅论方法，数学进展，1984,13:266 ~ 289

10 Komatsn T. Markov processes associated with certoin inteyrodifferetial perator, Osakn J Math 1973,10:271 ~ 303

The Sub－martingale Problem for Reflected Diffusions with Poisson Jumps in a Half－space and Its Application

Ding Deng *

Abstract The sub－martingale problems for reflected diffusions with Piosson jumps in a half－space are considered. The existence of solutions for sub－martingale problems without continuity assumptions on the coefficients is obtained. And from the solutions of the sub－martingale problems, the existence of a weak solution is established for a stochastic differential equation with Poisson jumps in a half－space with refecting boundary conditions.

Keywords martingale, sul－martingale problem stochastic differential equation

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275