第35卷 第3期
1996年5月
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 35 No. 3
May 1996

Laplace 序定义的寿命分布类及相应的半序*

尹 小 玲
(中山大学数学系，广州 510275)

摘 要 把用 Laplace 序定义的几种寿命分布类推广到随机变量的半序的概念，并讨论了这样一些相应于寿命分布类的半序之间的关系，给出了在可靠性应用方面的解释．

关键词 寿命分布类，半序，Laplace 序

分类号 O 211.5

随机变量序的概念在可靠性理论，排队论等随机模型中的应用正日益广泛，近10年来这方面的研究非常活跃．利用随机变量序引进各种寿命分布类的研究，除了由分布序 $\leqslant_d$ 刻划的寿命分布类 IFR，NBU，NBUE 和 HNBUE 以及它们的对偶类外，相继地许多文献讨论了利用凸序 $\leqslant_c$，凹序 $\leqslant_{cv}$，Laplace 序 $\leqslant_L$，似然比序 $\leqslant_{LR}$，失效率序 $\leqslant_f$ 和平均剩余寿命序 $\leqslant_{MR}$ 等刻划的寿命分布类及其它们的对偶类[1~7]．进一步又有作者讨论了相应于某些寿命分布类的半序[8]，从而推广了寿命分布类的概念．本文就 Laplace 序 $\leqslant_L$ 定义的几种寿命分布类 IFRL，NBUL 和 $\mathscr{L}$ 建立了相应的半序，并推出有关性质．

1 基本概念

设非负随机变量 Z 表示系统的寿命，具有分布函数 $F(x)=P\{Z\leqslant x\}$ 满足 $F(0)=0$ 和 $F(x)$ 严格递增，则系统的存活函数为 $\overline{F}(x)=1-F(x)$，时刻 t 的剩余寿命存活函数为

$$\overline{F}^t(x)=\overline{F}(x+t)/\overline{F}(t), \quad x,t\geqslant 0 \tag{1}$$

又若系统存在平均寿命 $\mu_F=\int_0^\infty \overline{F}(x)\mathrm{d}x$，则平均剩余寿命函数和 F 的平衡分布分别为

$$\mu_F(t)=\int_0^\infty \overline{F}^t(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^\infty \overline{F}(x)\mathrm{d}x, \quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

$$F_e(x)=\frac{1}{\mu_F}\int_0^x \overline{F}(u)\mathrm{d}u,\ x\geqslant 0 \tag{3}$$

记 $\mathscr{F}$ 为满足上述各条件的分布函数 F 的全体构成的集合．$\forall\ F,G\in\mathscr{F}$，若 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}F(x)\geqslant\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}G(x)$，$\forall\ s\geqslant 0$ 或等价地 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\overline{F}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\overline{G}(x)\mathrm{d}x$，$\forall\ s\geqslant 0$，则称 F 依 Laplace 序小于 G，记为 $F\leqslant_L G$．文[2]和[3]利用 Laplace 序定义了 IFRL，NBUL，NBUEL 和 HNBUEL 寿命分布类，并且文[3]证明了 NBUEL 和 HNBUEL 都等价于文[6]引进的寿命分布类 $\mathscr{L}$，可归纳如下：① $F\in$ IFRL 若 $F^t\leqslant_L F^s$，$0\leqslant s<t$．② $F\in$

---

* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期：1995-06-05 尹小玲，女，39岁，副教授

NBUL　若 $F^t \leqslant_L F$，$t \geqslant 0$. ③ $F \in \mathscr{L}$　若 $F_e \leqslant_L F$ 或等价 $F_e \leqslant_L \mathrm{Exp}\{\frac{1}{\mu_F}\}$其中 $\mathrm{Exp}\{\lambda\}$是参数 λ 的指数分布．

下面的定义引自文献[8]，但其中序 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$ 的定义不同于[8]中的定义．它们给出了相应于寿命分布类的半序．

定义 1　任意 $F,G \in \mathscr{F}$，记

$$\alpha(x)=G^{-1}\circ F(x)=\overline{G}^{-1}\circ\overline{F}(x),\ \beta(x)=G_e^{-1}\circ F_e(x)=\overline{G}_e^{-1}\circ\overline{F}_e(x),x\geqslant 0$$

(1)若 $\alpha(x)$是上次可加的，则称 F 依 NBU 小于 G，记为 $F\overset{\text{NBU}}{\leqslant}G$(或 $F\overset{sup}{\leqslant}G$)；

(2)若 $\beta(x)$是凸函数，则称 F 依 DMRL 小于 G，记为 $F\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}G$；

(3)若 $\beta'(x)\geqslant\beta'(0)$，$x\geqslant 0$，则称 F 依 NBUE 小于 G，记为 $F\overset{\text{NBUE}}{\leqslant}G$.

对于 $F,G\in\mathscr{F}$，若存在某 $\theta>0$，使 $F(x)=G(\theta x)$，则称 F 等价于 G，记为 $F\sim G$. 定义 1 中给出的所有序关于等价类是 $\mathscr{F}$ 上的半序，即满足：①自反性：若 $F\sim G$，则 $F\prec G$；②反称性：若 $F\prec G$ 且 $G\prec F$，则 $F\sim G$；③传递性：若 $F\prec G$ 且 $G\prec H$，则 $F\prec H$.
此外，它们都具有性质(M)：即若对 $c>0$，定义 $F^c(x)=F(x/c)$，则由 $F\prec G$ 可推出 $F^c\prec G^c$. 另一个重要性质是若 G 是指数分布，则 $F\overset{\mathscr{P}}{\leqslant}G$ 当且仅当 $F\in\mathscr{P}$，其中 $\mathscr{P}\in\{$NBU，DMRL，NBUE$\}$. 正是因为这一性质，这样定义的序被视为寿命分布类概念的推广而称为相应于寿命分布类的序，它使得同一类的寿命有可能进行比较，且寿命分布类是依相应的序受控于指数分布．由于这些序是定义在等价类上，故可取指数分布的均值为 1.

2　IFRL 序

设 $F,G\in\mathscr{F}$，对$\forall\ s\geqslant 0$ 记

$$\overline{I}(x)=\mathrm{e}^{-(s/\mu_F)x}\overline{F}(x),\quad \overline{J}(x)=\mathrm{e}^{-(s/\mu_G)x}\overline{G}(x),\ x\geqslant 0$$

易证下述结论成立．

定理 1　下列命题等价

(1) $F\in$ IFRL；

(2)F^t 依$\leqslant_L$ 序在 $t\geqslant 0$ 单调递减；

(3)对$\forall\ s>0$，$\mu_I(t)=(1/\overline{I}(t))\int_t^\infty \overline{I}(x)\mathrm{d}x$在 $t\geqslant 0$ 单调递减；

(4)对$\forall\ s\geqslant 0$，$-\ln\int_t^\infty \overline{I}(x)\mathrm{d}x$在 $t\geqslant 0$ 是凸函数；

(5)$I\in$ DMRL，($s\geqslant 0$).

记 $\omega_s(x)=J_e^{-1}\circ I_e(x)=\overline{J}_e^{-1}\circ\overline{I}_e(x)$，$x\geqslant 0$，则易得

定理 2　下列命题等价

(1)对$\forall\ s>0$，$\omega_s(x)$是凸函数；

(2)对$\forall\ s>0$，$\omega_s'(x)=(\mu_J/\mu_I)[\overline{I}(x)/(\overline{J}\circ\omega_s(x))]$在 $x\geqslant 0$ 单调递增；

(3)对$\forall\ s>0$，$\mu_I(x)/(\mu_J\circ\omega_s(x))$在 $x\geqslant 0$ 单调递减；

(4)对$\forall\ s>0$，$\overline{I}\circ\overline{I}_e^{-1}(u)/(\overline{J}\circ\overline{J}_e^{-1}(u))$在 $u\in(0,1]$单调递减；

(5)$I\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}J$ ($s\geqslant 0$).

定义 2 若定理 2 中任一条件成立，则称 F 依 IFRL 小于 G，记为 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}G$.

从上述定义和定理 1,2 可见，寿命分布类 IFRL 和 DMRL 之间以及相应的序 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$ 和 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$ 之间有着密切的联系．若两部件分别具有寿命分布 F 和 G，它们分别与参数为 s/μ_F 和 $s/\mu_G(s\geqslant 0)$ 的指数寿命分布独立部件构成两个串联系统，令 I 和 J 分别表示这两个系统的寿命分布，于是定理 1 意味着部件具有寿命性质 IFRL 的充要条件是系统具有寿命性质 DMRL，而定理 2 和定义 2 则意味着两部件的寿命具有序关系 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$ 的充要条件是两系统的寿命具有序关系 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$．利用 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$ 的已知性质我们立即可得 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$ 的有关性质．

引理 1 设 $\theta>0$，则

$$F(x)=G(\theta x)\Leftrightarrow I(x)=J(\theta x)\Leftrightarrow\theta=\mu_G/\mu_F=\mu_J/\mu_I$$

证明 设 $F(x)=G(\theta x)$，则

$$\mu_F=\int_0^\infty\overline{F}(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\overline{G}(\theta x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\int_0^\infty\overline{G}(x)\mathrm{d}x=\mu_G/\theta \tag{4}$$

于是
$$\overline{I}(x)=\mathrm{e}^{-(s/\mu_F)x}\,\overline{F}(x)=\mathrm{e}^{-(s/\mu_G)\theta x}\,\overline{G}(\theta x)=\overline{J}(\theta x),\ s,x\geqslant 0 \tag{5}$$

由(4)式知 $\theta=\mu_G/\mu_F=\mu_J/\mu_I$，而这又等价于

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-su}\,\overline{F}(u)\mathrm{d}u=\frac{\mu_F}{\mu_G}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\mu_F/\mu_G)su}\,\overline{G}(u)\mathrm{d}u=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-sy}\overline{G}(\frac{\mu_G}{\mu_F}y)\mathrm{d}y$$

等式两边取 Laplace 反变换即得 $\overline{F}(x)=\overline{G}(\mu_Gx/\mu_F)=\overline{G}(\theta x)$.

定理 3 序 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$ 关于等价类是 $\mathscr{F}$ 上的半序．

证明 注意到 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}G$ 等价于 $I\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}J$，则由引理 1 及序 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$ 关于等价类的半序性立即得证．

定理 4 序 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$ 具有性质(M).

证明 对 $\forall\ c>0$，由 $F^c(x)=F(x/c)$ 可得 $\mu_{F^c}=c\mu_F$，$I^c(x)=\mathrm{e}^{-(s/\mu_{F^c})x}\,\overline{F}^c(x)=\mathrm{e}^{-(s/(c\mu_F))x}\,\overline{F}(x/c)=I(x/c)$，同理由 $G^c(x)=G(x/c)$ 可得 $J^c(x)=J(x/c)$．于是由 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}G$ 等价于 $I\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}J$ 及序 $\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}$ 的(M)性质即得证．

定理 5 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}\mathrm{Exp}\{1\}$ 当且仅当 $F\in$ IFRL

证明 $\overline{G}(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $J(x)=\mathrm{e}^{-(s+1)x}$，于是

$$F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}\mathrm{Exp}\{1\}\Leftrightarrow I\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}\mathrm{Exp}\{s+1\}\leqslant\mathrm{Exp}\{1\}\Leftrightarrow I\in\text{DMRL}\Leftrightarrow F\in\text{IFRL}$$

定理 6 若 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}G$，则 $F\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}J$.

证明 $F\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}G$ 等价于 $\forall\ s\geqslant 0$，有 $I\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}J$．特别令 $s=0$，即得 $F\overset{\text{DMRL}}{\leqslant}G$.

3 NBUL 序和 $\mathscr{L}$ 序

定义 3 (1) 称 F 依 NBUL 小于 G 并记为 $F\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}G$，如果下列条件之一成立

① $$\frac{\int_x^\infty\mathrm{e}^{-su}\overline{F}(u)\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{-sx}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-su}\overline{F}(u)\mathrm{d}u}\leqslant\frac{\int_{a(x)}^\infty\mathrm{e}^{-(\mu_F/\mu_G)su}\overline{G}(u)\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{-(\mu_F/\mu_G)sa(x)}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\mu_F/\mu_G)su}\overline{G}(u)\mathrm{d}u},\ s,x\geqslant 0 \tag{6}$$

② $\dfrac{\int_{F^{-1}(y)}^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du}{e^{-sF^{-1}(y)}\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du} \leqslant \dfrac{\int_{G^{-1}(y)}^{\infty} e^{-(\mu_F/\mu_G)su}\overline{G}(u)du}{e^{-(\mu_F/\mu_G)sG^{-1}(y)}\int_0^{\infty} e^{-(\mu_F/\mu_G)su}\overline{G}(u)du}$，$s\geqslant 0$，$0\leqslant y<1$　(7)

③ $\dfrac{\overline{I}_e(x)}{e^{-(s/\mu_F)x}} \leqslant \dfrac{\overline{J}_e\circ\alpha(x)}{e^{-(s/\mu_G)\alpha(x)}}$，$s\geqslant 0$，$x\geqslant 0$　(8)

(2) 称 F 依 $\mathscr{L}$ 小于 G 并记为 $F\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}G$，如果下列条件之一成立

① $(1/\mu_F)\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du \geqslant (1/\mu_G)\int_0^{\infty} e^{-(\mu_F/\mu_G)su}\overline{G}(u)du$，$s\geqslant 0$　(9)

② $\int_0^{\infty} e^{-su}dF(u) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-(\mu_F/\mu_G)su}dG(u)$，$s\geqslant 0$　(10)

③ $\mu_G/\mu_F \geqslant \mu_J/\mu_I\,(s\geqslant 0)$.　(11)

定理 7　序 $\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}$ 和序 $\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}$ 都是定义在 $\mathscr{F}$ 的等价类上的半序．

证明　①自反性：设 $F(x)=G(\theta x)$，由引理 1 得 $\theta=\mu_G/\mu_F=\mu_J/\mu_I$，即 $F\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}G$. 又由引理 1 知 $I(x)=J(\theta x)$，从而 $I_e(x)=J_e(\theta x)$，于是 $\overline{I}_e(x)/e^{-(s/\mu_F)x}=\overline{J}_e(\theta x)/e^{-(s/\mu_G)\theta x}=(\overline{J}_e\circ\alpha(x))/e^{-(s/\mu_G)\alpha(x)}$，即 $F\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}G$.

②反称性：设 $F\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}G$ 且 $G\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}F$，则(6)式成为等式．令 $s=0$ 得 $(1/\mu_F)\int_x^{\infty}\overline{F}(u)du=(1/\mu_G)\int_{\alpha(x)}^{\infty}\overline{G}(u)du$，即 $\overline{F}_e(x)=\overline{G}_e\circ\alpha(x)$ 或 $\alpha(x)=\beta(x)$，于是 $\beta'(x)=(\mu_G/\mu_F)(\overline{G}\circ\alpha(x))/(\overline{G}\circ\beta(x))=\mu_G/\mu_F$. 又由 $\beta(0)=0$ 得 $\alpha(x)=\beta(x)=(\mu_G/\mu_F)x$，即 $F\sim G$.

若 $F\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}G$ 且 $G\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}F$，则(11)式成为等式，由引理 1 即得 $F\sim G$.

③传递性：由(7)和(10)式显然成立．

定理 8　序 $\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}$ 和序 $\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}$ 都具有性质(M).

证明　记 $\alpha_c(x)=(G^c)^{-1}\circ F^c(x)=(\overline{G}^c)^{-1}\circ\overline{F}^c(x)$ 和 $\theta=\mu_G/\mu_F$，易证 $\alpha_c(x)=c\alpha(x/c)$，$\theta=\mu_G/\mu_F=\mu_{G^c}/\mu_{F^c}$. 若 $F\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}G$，则

$$\frac{\int_x^{\infty} e^{-su}\overline{F^c}(u)du}{e^{-sx}\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F^c}(u)du}=\frac{\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-scy}\overline{F}(y)dy}{e^{-sx}\int_0^{\infty} e^{-scy}\overline{F}(y)dy}\leqslant\frac{\int_{\alpha(\frac{x}{c})}^{\infty} e^{-\frac{scy}{\theta}}\overline{G}(y)dy}{e^{-\frac{sc}{\theta}\alpha(\frac{x}{c})}\int_0^{\infty} e^{-\frac{scy}{\theta}}\overline{G}(y)dy}=\frac{\int_{\alpha_c(x)}^{\infty} e^{-\frac{su}{\theta}}\overline{G^c}(u)du}{e^{-\frac{s}{\theta}\alpha_c(x)}\int_0^{\infty} e^{-\frac{su}{\theta}}\overline{G^c}(u)du}$$

此即 $F^c\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}G^c$. 若 $F\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}G$，则 $\mu_{G^c}/\mu_{F^c}=\mu_G/\mu_F\geqslant\mu_J/\mu_I=\mu_{J^c}/\mu_{I^c}$，故 $F^c\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}G^c$.

定理 9　i) $F\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}\text{Exp}\{1\}$ 当且仅当 $F\in\text{NBUL}$

ii) $F\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}\text{Exp}\{1\}$ 当且仅当 $F\in\mathscr{L}$

证明　将 $\overline{G}(x)=e^{-x}$ 代入(6)和(9)式得

$$\frac{\int_x^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du}{e^{-sx}\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du}\leqslant\frac{\int_{\alpha(x)}^{\infty} e^{-(\mu_F s+1)u}du}{e^{-\mu_F s\alpha(x)}\int_0^{\infty} e^{-(\mu_F s+1)u}du}=\overline{F}(x)$$

$$\frac{1}{\mu_F}\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)du\geqslant\int_0^{\infty} e^{-(\mu_F s+1)u}du=\frac{1}{1+\mu_F s}$$

上两式分别等价于 $F\in\text{NBUL}$ 和 $F\in\mathscr{L}$

定理 10 若 $F \overset{\text{NBUL}}{\leqslant} G$，则 $F \overset{\text{NBUE}}{\leqslant} G$.

证明 在(6)式中令 $s=0$ 得 $\frac{1}{\mu_F}\int_x^{\infty}\overline{F}(u)\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{\mu_G}\int_{\alpha(x)}^{\infty}\overline{G}(u)\mathrm{d}u, x\geqslant 0$，这等价于 $\overline{F}_e(x) \leqslant \overline{G}_e \circ \alpha(x)$ 或 $\beta(x)\geqslant\alpha(x)$. 于是 $\beta'(x)=\frac{\mu_G}{\mu_F}\frac{\overline{G}\circ\alpha(x)}{\overline{G}\circ\beta(x)}\geqslant\frac{\mu_G}{\mu_F}=\beta'(0), x\geqslant 0$，故 $F \overset{\text{NBUE}}{\leqslant} G$.

文[8]举例说明了由 $\overset{\text{NBU}}{\leqslant}$ 不能推出 $\overset{\text{NBUE}}{\leqslant}$，因此由 $\overset{\text{NBU}}{\leqslant}$ 也不可能推出 $\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}$，否则与定理10矛盾. 将本文涉及到的几种相应于寿命分布类的半序之间的蕴含关系总结如下：

$$(\overset{\text{IFRL}}{\leqslant})\Rightarrow(\overset{\text{DMRL}}{\leqslant})\Rightarrow(\overset{\text{NBUE}}{\leqslant})\Leftarrow(\overset{\text{NBUL}}{\leqslant})$$

显然，将序 $\overset{\text{IFRL}}{\leqslant}$，$\overset{\text{NBUL}}{\leqslant}$ 和 $\overset{\mathscr{L}}{\leqslant}$ 的定义及有关结论中的单调性或不等式反向即可得与对偶类相应的序 $\overset{\text{DFRL}}{\leqslant}$，$\overset{\text{NWUL}}{\leqslant}$ 和 $\overset{\overline{\mathscr{L}}}{\leqslant}$ 的定义及其有关结论.

参 考 文 献

1 邓永录. 随机模型及其应用. 北京：高等教育出版社，1994. 529～583

2 王文义. NBUL寿命分布类. 见：可靠性理论，方法及应用. 北京：机械工业出版社，1994. 267

3 邓永录，尹小玲. 用各种随机序刻划的一些寿命分布类. 见：全国第五届可靠性学术会议论文集. 北京：机械工业出版社，1995. 116～123

4 Cao J H. The classes of life distributions defined by convex ordering, Proc of 2nd Conf of APORS. ed. Wu C P. Beijing: Beijing University Press, 1991. 357～362

5 Deshpande J V, Kochar S C, Singh H. Aspect of posititive aging. J Appl Prob, 1986, 23: 748

6 Klefsjö B. A useful aging property based on the Laplace transform. J Appl Prob, 1983, 20: 615

7 Loh W Y. A new generalization of the class of NBU distributions, IEEE Trans Reliab, 1984, R33: 419～422

8 Kochar S C, Wiens D. Partial orderings of life distributions with respect to their aging properties. Naval Research Logistics, 1987, 34: 823～829

The Aging Criteria Defined by Laplace Ordering and the Partial Orderings Related to These Aging Criteria

Yin Xiaoling *

Abstract Some aging criteria defined by Laplace ordering are generalized to the concept of random variable orderings which are partial orderings. Some relationships among these partial orderings related to aging criteria are discussed and the interpretations of these relationships in reliability are described.

Keywords class of life distributions, partial ordering, Laplace ordering

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275