第35卷 第2期
1996年 3月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 35 No. 2
Mar. 1996

大围长图中控制圈的一个局部条件

娄定俊
(中山大学计算机科学系，广州 510275)

摘　要　设 G 是围长大于或等于5的连通图. 本文证明了:如果对 G 中每个顶点 v, 距离 v 为2和3的顶点导出的子图的独立数不大于最小度的两倍减3, 那么 G 中有控制圈.

关键词　控制圈，局部条件，最小度数，独立数

分类号　O157.5

1　引言与基本术语

本文中讨论的所有图均为有穷、无向和简单的.

设 G 是连通图. G 中的圈 C 被称为控制圈，是说:G 中每一条边至少有一端点在 C 上.

设 v 是 G 中的一个顶点. 定义 $N_k(v)=\{u|u\in V(G)$ 且 $d(u,v)=k\}$. 我们把 $N_1(v)$ 简写为 $N(v)$. 设 H 是 G 的一个子图且 $S\subseteq V(G)$. 那么 $N_H(v)=N(v)\cap V(H)$ 且 $N_S(v)=N(v)\cap S$. 设 C 是 G 的一个圈，我们给 C 设定一个方向. 设 $v\in V(C)$. 用 v^+ 表示在 C 的方向上 v 的后继顶点，v^- 表示在 C 的方向上 v 的前趋顶点. 设 $u,v\in V(C)$. 用 $C^+[u,v]$ 表示在 C 的方向上从 u 到 v 的路径，$C^-[u,v]$ 表示在 C 的逆方向上从 u 到 v 的路径. 设 $w\in V(G)\backslash V(C)$. 定义 $N_C^+(w)=\{u^+|u\in N_C(w)\}$ 以及 $N_C^-(w)=\{u^-|u\in N_C(w)\}$. 用 C_m 表示长为 m 的圈.

本文未定义的其它术语和记号均引自[1].

自从 Hasratian 和 Khachatrian[2] 建立第一个 Hamilton 图的局部条件以来，若干图论学者对这个课题作了研究(例如:[3]). 笔者在[4]和[5]中，得到了一些具有大围长的 Hanilton 图的局部条件. 本文给出具有大围长的图中存在控制圈的一个局部条件. 对控制圈研究的有关进展，参见[6]和[7].

2　主要结果

首先引入一个引理.

引理1　设 G 是 $g(G)\geq 5$ 的连通图. 如果对每个顶点 $v\in V(G)$, 有 $\alpha(G[N_2(v)\cup$

收稿日期:1995-05-10　　娄定俊，男，33岁，副教授

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

$N_3(v)])\leqslant 2\delta-3$，那么 G 是正则 2 连通图.

证明　假设 G 不是正则图. 那么存在两个相邻顶点 u 和 v，使得 $d(u)<d(v)$. 由于 $g\geqslant 5$，$(N(u)\backslash\{v\})\cup(N(v)\backslash\{u\})$ 是一个独立集. 由本引理的条件，$\delta\geqslant 2$. 设 $x\in N(u)\backslash\{v\}$. 那么 $(N(u)\backslash\{v,x\})\cup(N(v)\backslash\{u\})$ 是 $N_2(x)\cup N_3(x)$ 中的独立子集. 然而 $|(N(u)\backslash\{v,x\})\cup(N(v)\backslash\{u\})|=d(u)-2+d(v)-1>2d(u)-3\geqslant 2\delta-3$，与本引理的条件矛盾. 因此 G 是正则图.

假设 G 中有割点 w. 由以上证明，G 是 k 正则图. 当 $k=0$ 或 1，G 是 K_1 或 K_2，这与本引理的条件矛盾. 当 $k=2$ 时，G 是一个圈 C_m. 由本引理的条件知，$m\leqslant 5$. 因而 G 是 2 连通的. 以下假设 $k\geqslant 3$.

设 u,v 和 x 是$(N(w)$ 中的 3 个不同的顶点. 因为 w 是一个割点，不失一般性，设 u 和 v 属于 $G-w$ 的不同分支. 由于 $g\geqslant 5$ 且 G 是正则图，$(N(u)\backslash\{w\})\cup(N(v)\backslash\{w\})\cup(N(w)\backslash\{u,v,x\})$ 是 $N_2(x)\cup N_3(x)$ 中的独立子集. 然而 $|(N(u)\backslash\{w\})\cup(N(v)\backslash\{w\})\cup(N(w)\backslash\{u,v,x\})|\geqslant|N(u)|-1+|N(v)|-1=d(u)+d(v)-2>2\delta-3$，这与本引理的条件矛盾. 证毕.

定理 1　设 G 是 $g\geqslant 5$ 的连通图. 如果对每个顶点 $v\in V(G)$，$\alpha(G[N_2(v)\cup N_3(v)])\leqslant 2\delta-3$，那么 G 中存在控制圈.

证明　设 G 满足本定理的条件. 将证明 G 中的最长圈 C 是控制圈. 由引理 1，G 是 k 正则图. 当 $k=2$，G 是 C_5. 显然，G 有控制圈. 因而，以下假设 $k\geqslant 3$. 假设 C 不是 G 的控制圈. 那么存在 $G-V(C)$ 的一个分支 R 使得 $|V(R)|\geqslant 2$. 我们给 C 设定一个方向. 设 $u\in V(R)$ 使得 $N_c(u)\neq\Phi$ 且 $v\in N_R(u)$. 由引理 1，G 是 2 连通图. 分两个情形讨论.

情形 1　$N_C(v)\neq\varphi$.

(1)　$N_C(u)=N(u)\backslash\{v\}$ 且 $N_C(v)=N(v)\backslash\{u\}$.

这时，$N_C^+(u)$ 和 $N_C^+(v)$ 是独立集，否则 G 中存在比 C 长的圈 C' 使得 $V(C')=V(C)\cup\{u\}$ 或 $V(C')=V(C)\cup\{v\}$，这与 C 的最长圈的假设矛盾. 由于 $g\geqslant 5$，$N_C(v)\cap(N_C(u)\cup N_C^+(u)\cup N_C^-(u))=\varphi$. 并且不存在两个顶点 $x^+\in N_C^+(u)$ 且 $y^+\in N_C^+(v)$，使得 $x^+y^+\in E(G)$，否则 $C'=C^+[x^+,y]+yvux+C^-[x,y^+]+y^+x^+$ 是 G 中比 C 长的圈. 所以 $N_C^+(u)\cup N_C^+(v)$ 是 $N_2(u)\cup N_3(u)$ 中的独立子集，并且它的阶为 $d(u)-1+d(v)-1>2\delta-3$，这与本定理的条件矛盾.

(2) $N(u)\backslash(V(C)\cup\{v\})\neq\varphi$ 或 $N(v)\backslash(V(C)\cup\{u\})\neq\varphi$.

不失一般性，设 $N(v)\backslash(V(C)\cup\{u\})\neq\varphi$，如果存在一个顶点 $x\in N_R(V)\backslash\{u\}$ 使得 $N_C(x)=\varphi$，由于 $g\geqslant 5$，$(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{u,x\})$ 是独立集. 由于 C 是 G 中最长圈，$N_C^+(v)$ 是独立集并且不存在从 $(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{x,u\})$ 到 $N_C^+(v)$ 的边. 从而 $(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{x,u\})\cup N_C^+(v)$ 是独立集. 现在考虑 $N_C^+(u)$ 中的顶点 y^+. 由于 C 是 G 中最长圈，因此不存在从顶点 y^+ 到$(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{x,u\})\cup N_C^+(v)$ 的边. 因此$(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{x,u\})\cup N_C^+(v)\cup\{y^+\}$ 是 $N_2(u)\cup N_3(u)$ 中的一个独立子集. 但是

$$|(N(x)\backslash\{v\})\cup(N_R(v)\backslash\{x,u\})\cup N_C^+(v)\cup\{y^+\}|=|N(x)|-1+|N_R(v)|-2+|N_C^+(v)|+1=d(x)+d(v)-3+1>2\delta-3$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

这与本定理的条件矛盾.

因此对任意顶点$x \in N_R(v)\backslash\{u\}$, $N_C(x) \neq \varphi$. 设$N_R(v)\backslash\{u\} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$并设$x_i^+ \in N_C^+(v_i)(i = 1,2,\cdots,n)$. 设$X = \{x_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$. 因为$g \geqslant 5$, $X \cap N_C(u) = \varphi$, $X \cap N_C(v) = \varphi$且$N_C(u) \cap N_C(v) = \varphi$. 由$C$是最长圈的假设, $X \cap (N_C^+(v) \cup N_C^-(v)) = \varphi$, $X \cap (N_C^+(u) \cup N_C^-(u)) = \varphi$且$N_C(u) \cap (N_C^+(v) \cup N_C^-(v) = \varphi$. 并且$X \cup N_C(u) \cup N_C(v)$中任意两个不同的顶点在$C$上是不相邻的. 如果$X^+ \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(v)$中存在两个相邻顶点$x^+$和$y^+$, 那么$G$有一个比$C$长的圈$C'$, 矛盾. 故$X^+ \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(v)$是独立集. 由于$g \geqslant 5$, $N_R(u)\backslash\{v\}$是独立集. 并且不存在从$N_R(u)\backslash\{v\}$到$X^+ \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(v)$的边, 否则$G$中存在比$C$长的圈, 矛盾. 因而, $(N_R(u)\backslash\{v\}) \cup X^+ \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(v)$是$N_2(v) \cup N_3(v)$中的独立子集. 但是

$$\begin{aligned}&|(N_R(u)\backslash\{v\}) \cup X^+ \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(v)| = \\ &|N_R(u)| - 1 + |X^+| + |N_C^+(u)| + |N_C^+(v)| = \\ &d(u) + d(v) - 2 > 2\delta - 3,\end{aligned}$$

这与本定理的条件矛盾.

情形2 对任一顶点的$v \in N_R(u)$, $N_C(v) = \varphi$.

(1) 存在$N_2(u) \cap V(R)$中的顶点w, 使得$N_C(w) \neq \varphi$.

设$v \in N(w) \cap N(u)$. 则$v \in V(R)$. 注意到$(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N(w)\backslash\{v\})$是$N_2(u) \cup N_3(u)$中的独立子集. 并且$|(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N(w)\backslash\{v\})| = d(v) - 2 + d(w) - 1 = 2\delta - 3$. 设$x$是$N_C^+(u)$中任一顶点. 由于$g \geqslant 5$且$C$是$G$中的最长圈, $N_C(w) \cap (N_C(u) \cup N_C^-(u) \cup N_C^+(u)) = \varphi$. 而且不存在从$x$到$(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N_R(w)\backslash\{v\})$的边. 然而, $|(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N(w)\backslash\{v\}) \cup \{x\}| > 2\delta - 3$, 而且$(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N(w)\backslash\{v\}) \cup \{x\} \subseteq N_2(u) \cup N_3(u)$. 因此, 由本定理的条件, x与$N_C(w)$中一个顶点相邻. 从而$N_C^+(u) \subseteq N_2(w)$.

因为C是G中一个最长圈并且$g \geqslant 5$, $(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N_R(u)\backslash\{v\}) \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(w)$是$N_2(w) \cup N_3(w)$中的独立子集. 同样可得

$$\begin{aligned}&|(N(v)\backslash\{u,w\}) \cup (N_R(u)\backslash\{v\}) \cup N_C^+(u) \cup N_C^+(w)| = d(v) + d(u) - 3 + \\ &|N_C(w)| > 2\delta - 3\end{aligned}$$

这与本定理的条件矛盾.

(2) 对任意顶点$w \in N_2(u) \cap V(R)$, $N_C(w) = \varphi$.

设$w \in N_2(u) \cap V(R)$, $v \in N(w) \cap N(u)$且$x \in N_C^+(u)$. 由对C的假设和$g \geqslant 5$的条件, $(N(w)\backslash\{v\}) \cup (N(v)\backslash\{u,w\}) \cup \{x\}$是$N_2(u) \cup N_3(u)$中的独立子集. 然而$|(N(w)\backslash\{v\}) \cup (N(v)\backslash\{u,w\}) \cup \{x\}| = d(w) - 1 + d(v) - 2 + 1 > 2\delta - 3$, 这与本定理的条件矛盾. 从而完成了本定理的证明.

尽管很难构造满足定理1的条件的图, 我们已验证$(k,5)$笼$(k = 2,3,4)$满足该定理的条件. 以下我们给出一个猜想.

猜想1 所有$(k,5)$笼满足定理2的条件, 因而有控制圈.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

参　考　文　献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory mith applications. London: Macmillan Press, 1976

2 Hasratian A S, Khachatrian N K. Somc localization theorems on hamillonian circuts. J Combin Theory, 1990, B49: 287 ～ 294

3 Shi Ronghua. 2-Neighborhoods and hamiltonian conditions. J Graph Theory, 1992, 16:267 ～ 271

4 娄定俊. Hamilton 偶图的局部度数条件. 中山大学学报(自然科学版). 1995, 34(2):18 ～ 21

5 娄定俊. 局部独立数条件与具有大围长的 Hamiltan 图. 纯数学与应用数学, 1994, 10:84 ～ 87

6 Bollobas B, Cockayne E J. Graph-theoretic parameters concorning domination, independence and irredundance. J Graph Theory, 1979:3:241 ～ 249

7 Bondy J A, Fan G. A suffioiant condition for dominating cycles. Discretc Math, 1987, 67: 205 ～ 208

A Local Condition for Dominating Cycles in Graphs with Large Girth

Lou Dingjun *

Abstract For a connectcd graph G with girth of least five, it is proved in this paper that if, for each vertex v of G, the independence number of the subgraph reduced by the vertices that are of distance two or three from v is not greater than two times the minimum degree minus three, then G has a dominating cycle.

Keywords dominating cycle, local condition, minimum degree, independence number

* Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www