

# Lipschitz 曲面上 Besov 空间及其特征刻划<sup>\*</sup>

颜立新

(中山大学数学系, 广州 510275)

**摘要** 利用 Clifford 分析工具, 给出了 Lipschitz 曲面上的左型 Besov 空间  $LB_p^{T,q}(E)$  及右型 Besov 空间  $RB_p^{T,q}(E)$  定义, 其中  $T \in \mathbf{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$ , 并且在  $0 < T < 2$  时, 给出了它的特征刻划.

**关键词** Besov 空间, 光滑分子, Clifford 分析, Calderón-Zygmund 算子

**分类号** O174.2

## 1 Besov 空间的研究

设  $A(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是实值的 Lipschitz 函数, 即满足  $|A(x) - A(y)| \leq M|x - y|$ . 设  $E = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid x^0 = A(x^1, \dots, x^n)\}$  是  $\mathbf{R}^{n+1}$  上的 Lipschitz 曲面. 本文主要目的是在 Lipschitz 曲面  $E$  上定义 Besov 空间并给出它的两个等价刻划.

对于  $\mathbf{R}^n$  情形, 经典 Besov 空间的研究已有很长历史<sup>[1,2]</sup>. 近年来, 邓东皋和韩永生在 Lipschitz 曲面上引入一类分布, 通过 Calderón-Zygmund 算子理论, 建立了 Lipschitz 曲线上的 Besov 空间理论<sup>[3,4]</sup>. 本文第一个目的就是在 Lipschitz 曲面  $E$  上, 利用 Clifford 分析工具, 给出  $E$  上的左右型 Besov 空间  $LB_p^{T,q}(E), RB_p^{T,q}(E)$  定义, 其中  $T \in \mathbf{R}, 1 \leq p, q \leq \infty$ .

在  $\mathbf{R}^n$  情形, 任给一局部可积函数  $f(x)$  以及任意方体  $Q$  与整数  $k$ , 我们知道必存在多项式  $P_Q f(x)$ , 其次数不超过  $k$ , 使得

$$\int_Q (f - P_Q f)x^j dx = 0 \quad \forall 0 \leq |j| \leq k \quad (1)$$

记  $K_f(x, t) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - P_Q f| dy$ , 上确界表示取遍所有包含  $x$  且边长为  $t$  的方体. Dorronsor<sup>[5]</sup> 证明了如下结果: 对于  $T > 0, 1 \leq p, q \leq \infty$  有:  $f \in \dot{B}_p^{T,q}(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \left\{ \int_0^\infty (t^T \|K_f(x, t)\|_p)^q dt/t \right\}^{1/q} < \infty$  此时 (1) 中  $k = [T]$  即不超过  $T$  的最大整数. 本文另一目的就是运用 Calderón-Zygmund 算子理论, 将此结果推广到曲面  $E$  情形. 我们还给出 Besov 空间另一等价刻划, 它是 Calderón-Zygmund 算子理论的直接结果.

## 2 Clifford 分析

记  $\mathbf{R}(n)$  (或  $C(n)$ ) 为  $2^n$  维实 (或复) Clifford 代数, 其生成元为  $e_0, e_1, \dots, e_n$  满足

<sup>\*</sup> 收稿日期: 1995-07-13 颜立新, 男, 28 岁, 博士  
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

$$e_0 = 1$$

且 
$$e_j e_k = e_k e_j = -\delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \tag{2}$$

$$e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_s} = e_s, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n, \quad s = \{j_1, \dots, j_s\}$$

于是若规定  $e^h = e_0$ , 则  $\mathbf{R}^n$  (或  $C^n$ ) 中任意元  $u = \sum_s u_s e_s$ , 其中  $u_s \in \mathbf{R}$  (或  $C$ ). 范数定义为  $\|u\|^2 = \sum_s |u_s|^2$ .  $u = \sum_s u_s e_s$  共轭定义为  $\bar{u} = \sum_s \bar{u}_s \bar{e}_s$ , 其中  $\bar{e}_s = \pm e_s$ , 正, 负号选取使得  $\bar{u}_s u_s = u_s \bar{u}_s = 1$ .

给定  $C^1$  函数  $f(x) = \sum_s f_s(x) e_s$ , 其定义域为  $\mathbf{R}^{n-1}$  中开集  $K$ , 定义

及 
$$Df = \sum_{j,s} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} e_j e_s, \quad fD = \sum_{j,s} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} e_j \tag{3}$$

称  $f(x)$  为左 (或右) 正则函数, 如果  $Df = 0$  (或  $fD = 0$ ), 记为  $f \in LM(K)$  (或  $f \in RM(K)$ ). 若  $fD = Df = 0$ , 则称  $f$  为正则函数, 记为  $f \in M(K)$ .

例 1 Cauchy 核  $E(x) = \frac{1}{e_n |x|^m} \bar{x} \in M(\mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ , 其中  $e_n$  表示  $\mathbf{R}^n$  中单位球面积.

例 2 记  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ ,

$$Z^{(a)} = (x_l - a_l) e_0 - (x_0 - a_0) e_l, \quad l = 1, \dots, n$$

$$V_{l_1 \dots l_k}^{(a)} = \frac{1}{k!} \sum_{(b_1 \dots b_k)} E_{b_1 \dots b_k} Z_{b_1}^{(a)} \cdots Z_{b_k}^{(a)}, \quad (l_1, \dots, l_k) \in \{1, \dots, n\}^k$$

其中求和表示  $b_1, \dots, b_k$  是从数组  $\{l_1, \dots, l_k\}$  中任取  $k$  个重排整数, 则  $V_{l_1 \dots l_k}^{(a)} \in M(\mathbf{R}^{n+1})$ .

命题 1<sup>[7]</sup> 设  $K$  为  $\mathbf{R}^n$  中有界 Lipschitz 区域, 边界  $\partial K$  上单位外法向  $n(y)$  几乎处处存在, 并记  $d_y^e = n(y) dy$ , 设  $f(x)$  在  $K \cup \partial K$  邻域内左正则, 则有

$$\int_K E(y-x) d_y^e f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}$$

$$\int_K d_y^e f(y) = 0$$

### 3 Lipschitz 曲面上的 Besov 空间

记  $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n;$

$$D^\top = D_0^\top \cdots D_n^\top, \quad |\top| = \sum_{j=0}^n \top_j;$$

$$F_t(f)(x) = \frac{1}{e_n} \int_E \frac{x-y+t}{|x-y+t|^{n+1}} d_y^e f(y), \quad t \neq 0, x \in E;$$

$$\tilde{F}_t(f)(x) = \frac{1}{e_n} \int_E f(y) d_y^e \left( \frac{x-y+t}{|x-y+t|^{n+1}} \right), \quad t \neq 0, x \in E;$$

$$J_t(f)(x) = t! \int_E D_0^\top F_t(f)(x) \tilde{J}_t(f)(x) = t! \int_E D_0^\top \tilde{F}_t(f)(x), \quad t \in \mathbf{N} \tag{4}$$

定义 1  $f(x): E \rightarrow \mathbf{R}_n$  称为  $E$  上中心在  $z \in E$ , 宽度为  $d$  的  $(U, r, k)$  左型光滑分子, 其中  $0 < U \leq 1, 0 < r, U \leq k$ , 如果满足条件

①  $f(x) \in LM(E_K), E_K$  是  $E$  某一邻域;

②  $|D^g f(x)| \leq C \frac{d^r}{(d+|x-z_0|)^{|n+r|}}, x \in E, U \leq |g| \leq k;$

③  $|D^k f(x) - D^k f(y)| \leq C \left[ \frac{x-y}{d+|x-z_0|} \right]^U \frac{d^r}{(d+|x-z_0|)^{|k+r|};$

$$\forall x, y \in E, |x-y| \leq \frac{1}{2}(d+|x-z_0|)$$

$$\textcircled{4} \int_E V_{i_k}^{z,0} d^e_x f(x) = 0 \quad \forall \textcircled{0} \leq k \leq J = [r-1] \tag{5}$$

其中  $V_{i_k}^{z,0}(x)$  如例 2 所述.

记满足上述条件的函数集合为  $LM_{(z_0, d)}^{(U, r, k)}$ , 记  $\|f\|_{LM_{(z_0, d)}^{(U, r, k)}} = \inf\{\epsilon > 0, \text{使 (5) 中 } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ 成立}\}$ . 特别地, 如果  $z_0 = (A(0), 0, \dots, 0), d = 1$ , 则记  $LM_{(z_0, d)}^{(U, r, k)}$  为  $LM^{(U, r, k)}$ , 显然  $LM^{(U, r, k)}$  是 Banach 空间. 类似地, 可定义右型光滑分子  $RM_{(z_0, d)}^{(U, r, k)}$ , 只需将定义中的  $\textcircled{1}, \textcircled{4}$  换成相应的

$$\begin{aligned} \textcircled{1}' f(x) &\in RM(E_k), E_k \text{ 是 } E \text{ 的某一领域;} \\ \textcircled{4}' \int_E f(x) d^e_x V_{i_k}^{z,0} &= 0, \forall \textcircled{0} \leq k \leq J = [r-1] \end{aligned} \tag{6}$$

其中  $V_{i_k}^{z,0}$  如例 2 所述.

定义 2 设  $1 \leq p, q \leq \infty$ , 取  $l, U, k$  满足  $|\mathbb{T}| < l, \max(0, \mathbb{T}) < U, k < l, \max(0, -\mathbb{T}) < r < l$ . 定义 Lipschitz 曲面  $E$  上左型 Besov 空间  $LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$  (或右型 Besov 空间  $RB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$ ) 为所有满足如下不等式的分布  $f \in (RM^{(U, r, k)})'$  (或  $(LM^{(U, r, k)})'$ ) 即  $RM^{(U, r, k)}$  (或  $LM^{(U, r, k)}$ ) 上全体有界线性泛函组成的空间:

$$\begin{aligned} \|f\|_{LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)} &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|J_t(f)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty \\ \text{或 } \|f\|_{RB_p^{\mathbb{T}, q}(E)} &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|\tilde{J}_t(f)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty \end{aligned} \tag{7}$$

以下只考虑与  $LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$  有关结果, 对于  $RB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$ , 其结果类似.

命题 2 (Caldeón 型表示定理)

$$p^\circ \int_V \int_{-\infty}^{\infty} J_t^2(f) \frac{dt}{t} = 2^{\mathbb{T}} (2l-1)! f(x) \tag{8}$$

- ① 当  $f \in L^p(E), p > 1$  时, 则 (8) 式在  $L^p(E)$  意义下及几乎处处意义下成立;
  - ② 当  $f \in LM^{(U, r, k)}$  时, 则 (8) 式在  $LM^{(U', r', k')}$ ,  $0 < U' < U, 0 < r' < r, k' \leq k$  意义下成立;
  - ③ 当  $f \in (RM^{(U, r, k)})'$  时, 则 (8) 式在  $(RM^{(U', r', k')})' U < U', r < r', k \leq k'$  意义下成立.
- 由 Caldeón 型表示定理, 可证定义 2 中的  $LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$  与  $l, U, k$  的选取无关.

### 4 Besov 空间等价刻划

定义 3 设  $0 < \mathbb{T} < 2, 1 \leq p, q \leq \infty$ , 定义

$$LB_p^{\mathbb{T}, q}(E) = \{f \in L^p(E), \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|t^{5/2} F_t(f)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty\}$$

其中,  $t^{5/2} F_t(f)(x) = \{D^V F_t(f)(x)\}_{|V|=2}$ , 范数定义为

$$\|f\|_{LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)} = \|f\|_{p+} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|t^{5/2} F_t(f)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

定义 4 设  $0 < \mathbb{T} < 2, 1 \leq p, q \leq \infty$ , 定义

$$LY_p^{\mathbb{T}, q}(E) = \left\{ f \in L^p(E), \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|K_f(x, |t|)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

其中  $K_f(x, |t|) = \inf \left\{ \frac{1}{|t|^n} \int_{B(x, |t|) \cap E} |f(y) - A(y)| dy \right\}, A(y) \in L_p(E)$

$L_p(E) = \{\text{Clifford 代数意义下左正则的一次多项式}\}$

范数定义为  $\|f\|_{LY_p^{\mathbb{T}, q}(E)} = \|f\|_{p+} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-\mathbb{T}} \|K_f(x, |t|)\|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}}$

如同  $\mathbb{R}^n$  情形, 当  $f \in L^p(E)$  时, 定义  $LB_p^{\mathbb{T}, q}(E)$  为

$$\| f \|_{L^p_p(T, E)} = \| f \|_{p^+} \| f \|_{L^q_p(T, E)}$$

本文主要结果是:

定理 1 设  $f \in L^p(E)$ ,  $0 < T < 2$ ,  $1 < p, q < \infty$ , 则有下列等价关系

$$\| f \|_{L^p_p(T, E)} \approx \| f \|_{L^q_p(T, E)} \approx \| f \|_{L^q_p(T, E)}$$

即上述定义的两个函数空间是相互等价的 .

证明 分两部分证明 . 第一部分证明

$$\| f \|_{L^p_p(T, E)} \approx \| f \|_{L^q_p(T, E)} \tag{9}$$

为证 (9) 式, 只需验证

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-T} \| t^2 D_{x_j} F_t(f) \|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \| f \|_{L^q_p(T, E)} \tag{10}$$

$\forall i, j = 0, 1, \dots, n$

一旦 (10) 式得证, 不难得出 (9) 式, 因为反过来不等式显然 . 下面证明 (10) 式, 由 (4) 式有

$$\| t^2 D_{x_j} F_t(f) \|_p \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{|t|^2}{|h|} \wedge 1 \right) \| J_h(f) \|_p \frac{dh}{|h|} \tag{11}$$

$\forall i, j = 0, 1, \dots, n$

其中,  $a \wedge b = \min(a, b)$ .

因为

$$t^2 D_{x_j} F_t(J_h(f))(x) = \frac{1}{e_n} \int_E t^2 D_{x_j} F_{t^2 x_0} \left( \frac{x + t + h - y}{|x + t + h - y|^{m-1}} \right) dy J_h f(y) H(th)$$

其中

$$H(u) = \begin{cases} 1 & u > 0, \\ 0 & u < 0. \end{cases}$$

容易证明

$$\left| t^2 D_{x_j} F_{t^2 x_0} \left( \frac{x + t + h - y}{|x + t + h - y|^{m-1}} \right) \right| \leq C \left[ \frac{|t|^2}{|h|} \wedge 1 \right] \frac{|t| \vee |h|}{(|t| \vee |h| + |x - y|)^{m-1}}$$

其中  $a \vee b = \max\{a, b\}$

根据这个不等式, 利用 Calderón 型表示定理便不难验证 (11) 式, 并由 [3] 中定理 (3.5) 的技巧, (10) 式也是容易验证的 . 从而 (9) 式得证 .

第二部分证明  $\| f \|_{L^p_p(T, E)} \approx \| f \|_{L^q_p(T, E)}$  (12)

先设  $\| f \|_{L^q_p(T, E)} < \infty$ , 我们来证明

$$\| f \|_{L^p_p(T, E)} \leq C \| f \|_{L^q_p(T, E)} \tag{13}$$

由 [6] 技巧, 不难证得

$$| t^2 D_0^2 F_t(f)(x) | \leq C \int_{j=0}^{\infty} 2^{2j} K_f(x, 2^j |t|) \tag{14}$$

于是, 由 (14) 式有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-T} \| J_t(f) \|_p)^q \frac{dt}{|t|} \leq \\ & C \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_E (|t|^{-T} \int_{j=0}^{\infty} 2^{2j} K_f(x, 2^j |t|)^p dx)^{q/p} \frac{dt}{|t|} \leq \right. \\ & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{j=0}^{\infty} \left[ \int_E |t|^{-Tp} \cdot 2^{2j} (j+1)^p K_f(x, 2^j |t|)^p dx \right]^{q/p} \frac{dt}{|t|} \leq \\ & C \left( \int_{j=0}^{\infty} ((j+1)^p \cdot 2^{2j})^p \cdot 2^{2j} \right) \| f \|_{L^q_p(T, E)}^q \leq C \| f \|_{L^q_p(T, E)}^q \end{aligned}$$

现设  $\| f \|_{L^p_p(T, E)} < \infty$ , 要证

$$\| f \|_{L^p_p(\mathbb{E})} \leq C \| f \|_{L^p_p(\mathbb{E})} \tag{15}$$

由 [8] 知, 在  $L^p(E)$ ,  $p > 1$  意义下, 我们有  $F_t(f)(x) - F_{-t}(f)(x) = f(x)$

其中  $F_{\pm}(f)(x) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} F_t(f)(x)$ , 因此, 为证 (15) 式, 只需验证

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-T} \| K_{F_t(f)(x)}(x, |t|) \|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{1/q} \leq C \| f \|_{L^p_p(\mathbb{E})} \tag{16}$$

以及  $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (|t|^{-T} \| K_{F_t(f)(x)}(x, |t|) \|_p)^q \frac{dt}{|t|} \right\}^{1/q} \leq C \| f \|_{L^p_p(\mathbb{E})}$  (17)

我们只证明 (16) 式, (17) 式类似可得, 如记  $x = x + A(x)$ , 当  $x \in E$  时, 设  $y = y + A(y) \in B(x, |t|) \cap E$ , 构造一序列  $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$  如下:

$$y_0 = x + 4|t|, \quad y_j = y + \left( \frac{4-k}{2} \right)^j d + A(y), \quad j = 1, 2, \dots$$

其中  $k = 2 \cos\left(\frac{1}{2} \arctg \| A' \|_{\infty}\right)$ ,  $d = 4(|t| + (A(x) - A(y)))$

且记  $B(y_j, r_j) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}, |z - y_j| \leq r_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

于是, 设  $z \in B(y_j, r_j)$ , 令  $z = z + A(z) + h$ , 则必有  $c_1 h \leq r_j \leq c_2 h$ , 注意到

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in (z + A(z) + h) \in B(y_j, r_j)} |F(f)(y_j) - F(f)(y_{j-1}) - 5 F(f)(y_{j-1})(y - y_{j-1})| \leq \\ & C \int_{B(y_j, r_j)} h^2 |5^2 F(f)(z)| \frac{dz}{h^{n+1}} \end{aligned} \tag{18}$$

其中  $F(f)(x) = \frac{1}{c_n} \int_E \frac{x - y}{|x - y|^{n+1}} d^n y f(y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus E$

从而, 由 (18) 式有:

$$\begin{aligned} & |F_t(f)(y) - F(f)(y_0) - 5 F(f)(y_0)(y - y_0)| \leq \\ & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \{F(f)(y_j) - F(f)(y_{j-1}) - 5 F(f)(y_{j-1})(y - y_{j-1})\} \right| + \\ & \left| \sum_{j=1}^{\infty} 5 F(f)(y_j) - 5 F(f)(y_{j-1})(y - y_{j-1}) \right| \leq \\ & \sum_{j=0}^{\infty} \int_{z = z + A(z) + h \in B(y_j, r_j)} h^2 |5^2 F(f)(z)| \frac{dz}{h^{n+1}} \end{aligned}$$

又显然有  $A(y) = F(f)(y_0) - 5 F(f)(y_0)(y - y_0) \in Lp(E)$ , 于是我们有

$$\begin{aligned} & K_{F_t(f)(x, |t|)} \leq \frac{1}{|t|^n} \int_{B(x, |t|) \cap E} |F_t(f) - A(y)| dy \leq \\ & C \frac{1}{|t|^n} \int_{B(x, |t|) \cap E} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{z = z + A(z) + h \in B(y_j, r_j)} h^2 |5^2 F(f)(z)| \frac{dz}{h^{n+1}} \leq \\ & C \frac{1}{|t|^n} \int_0^{|t|} \int_{B(x, |t|) \cap E} h |5^2 F_h(f)| dy dh \leq CM \left( \int_0^{|t|} h |5^2 F_h(f)| dy \right)(x) \end{aligned}$$

其中  $M$  是 Hardy-Littlewood 极大函数. 故对  $p > 1$ , 有

$$\begin{aligned} & \| K_{F_t(f)}(x, |t|) \|_p \leq \left\| \int_0^{|t|} h |5^2 F_h(f)(x)| dh \right\|_p \leq \\ & C \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_0^{|t|} h^{\circ} |5^2 F_h(J_y^2(f))| dh \right\|_p \frac{dy}{|y|} \end{aligned}$$

同样, 由 [3] 中定理 (3.5) 技巧, 只需证

$$\left\| \int_0^{|t|} h^{\circ} |5^2 F_h(J_y^2(f))| dh \right\|_p \leq C \left[ \frac{|t|^2}{|h|} \wedge 1 \right] \| J_y(f) \|_p$$

便可得 (15) 式. 而上式证明只需一些初等估计, 我们在此省略了.

### 参 考 文 献

- 1 Peetre J, New thoughts of Besov spaces. Duke Univ Press, 1976
- 2 Stein E M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ Press, 1970
- 3 邓东皋, 韩永生. Lipschitz 曲线上的 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间, I, II. 数学学报, 1992, 35: 608-619; 1993, 36: 122-135
- 4 Deng D G, Han Y S. The Besov and Triebel-Lizorkin spaces with higher order on Lipschitz curves. Approximation Theory and its Applications, 1993, 9: 89-106
- 5 Dorronsoro J R. Mean oscillation and Besov spaces. Canad Math Bull, 1995, 28: 474-480
- 6 Semmes S. Differentiable function theory on Hypersurfaces in  $\mathbf{R}^n$  (without bounds on their smoothness). Indian Univ Math J, 1990, 39: 983-1002
- 7 Brackx F, Delanghe R, Sommen F. Clifford analysis. Res Notes in Math, No. 76. Pitman Boston, 1982
- 8 Li C, McIntosh A, Semmes S. Convolution singular integrals on Lipschitz surfaces. Journal of A. M. S., 1992, 5: 455-481

## The Besov Spaces on Lipschitz Surfaces and Characterizations

Yan Lixin\*

**Abstract** The left Besov spaces  $LB_p^{\tau, q}(E)$  and right Besov spaces  $RB_p^{\tau, q}(E)$  are given by using Clifford analysis, where  $\tau \in \mathbf{R}$  and  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Furthermore, we obtain two characterizations of the Besov spaces for  $0 < \tau < 2$ .

**Keywords** Besov spaces, smooth molecule, Clifford analysis; Calderón-Zygmund operator

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou, 510275