第 35 卷 第 1 期
1996 年 1 月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 35 No. 1
Jan. 1996

薄板和不可压流体耦合振动的边界元法研究

赵 键
(中山大学应用力学与工程系，广州 510275)

摘 要 研究薄板在不可压流体中的耦合振动. 提出把板振动的惯性力与流体作用于板上的动压力均纳入到面分布载荷一项中；从而获得了求解此类结构振动的问题的特殊的、高效的边界元算法模型；并通过了实例验证.

关键词 边界元法，薄板，耦合振动

分类号 O32.1

在船舶与海洋工程结构物的稳定性与可靠性分析中，需要研究板类结构与流体相互耦合作用而产生振动问题. 由于流体耦合作用力的介入，其求解过程比在真空中的情形要复杂得多. 文献〔1〕介绍了有限元法在耦合振动求解中的应用，它需要在三维流体空间中布置节点，因而划分的节点数多，需计算机内存空间大；特别是在理论上无法准确地计算涉及无限流体域的问题. 文献〔2〕所用级数展开法，只对几种简单几何形状和周边条件的板较为适合. 文献〔3〕的结果表明，流体对板振动的耦合作用是非常显著的，例如板在水中与在真空中相比同阶自振频率差别颇大. 因此，寻找求解板与流体耦合振动的通用高效算法，是具有实际工程意义和应用价值的.

近 10 年来，流体边界元法的提出及应用给解决涉及无限区域的流固耦合作用问题带来了很大的方便，因为它只需在固体边界面上布点求解. 把对流体运动与对结构振动分别求解所得到的两类方程组联合起来，即可计算出耦合振动的解. 由于板振动的边界元法与有限元法相比有节点数少、精度高等优点，因而近年来得到了广泛应用. 可是由于传统的薄板边界元法只在周边上布点，但其格林函数太复杂，计算难度大. 针对这个问题，本文在文献〔4〕研究成功薄板在真空中振动的一种新边界元解法模型的基础上，进一步提出把流体作用于板面的动压力项也合并到面分布载荷项中去，获得一种快速、高效的耦合振动边界元算法.

1 基本公式

弹性薄板在谐和力激励下的振动方程为[5]：

$$D\nabla^4 W = (Q + \rho\omega^2 W - P) \tag{1}$$

收稿日期：1994-05-30 赵键，男，31 岁，副教授

由于引起船舶与海洋工程结构物损坏的主要原因为低频振动，而在低频段可以忽略流体可压缩性的影响，则流体压力场满足[6]：

$$\nabla^2 P = 0 \tag{2}$$

上两式中，$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$，是板的抗弯刚度；E 为弹性模量；h 为板厚度；ν 为泊松比；ρ 为板的面密度；ω 为振动角频率；Q 为已知面分布外载荷；W 为板面横向位移；P 为流体动压力.

以简支矩形薄板为例进行计算. 将(1)式中惯性力项 $\rho\omega^2 W$ 与流体压力项 P 与已知外载 Q 合在一起，取板静力问题的格林函数($W^* = r^2 \ln r / 8\pi D$，r 为参考点与场点间距离)作为权函数，代入到文献〔7〕中列出的薄板静力问题的边界积分方程式中，有：

$$cW = \iint_\Omega (Q + \rho\omega^2 W - P) W^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma (R_n W^* + \frac{\partial W}{\partial n} M_n^*) \mathrm{d}\Gamma + \sum_{i=1}^{m} [[M_{ns} \cdot W^*]]_{\lambda_i} \tag{3}$$

$$c\frac{\partial W}{\partial N} = \iint_\Omega [Q + \rho\omega^* W - P] \frac{\partial W^*}{\partial N} \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma [R_n \frac{\partial W^*}{\partial N} + \frac{\partial W}{\partial n} \frac{\partial M_n^*}{\partial N}] \mathrm{d}\Gamma + \sum_{i=1}^{m} [[M_{ns} \cdot \frac{\partial W^*}{\partial N}]]_{\lambda_i} \tag{4}$$

式中，Ω 为板面区域；Γ 为板周边；N 为板周边上参考点的法向，n 则为板周边上场点的法向. 矩形板有 $m = 4$ 个角点 $\lambda_i (i = 1,2,3,4)$. $[[\cdot]]_{\lambda_i}$ 表示在角点 λ_i 沿边界正向的跳跃差. M_n，R_n 为板的弯矩及剪力，$M_{ns} = -D(1-\nu)\partial^2 W/\partial n \partial s$. M_n^*，$\partial W^*/\partial n$ 等与 W^* 相对应，见文献〔7〕.

$$C = \begin{cases} 1 & \text{参考点在 } \Omega \text{ 内;} \\ \Phi/2\pi & \text{参考点在 } \Omega \text{ 的周边 } \Gamma \text{ 上;} \\ 0 & \text{参考点在 } \Omega \text{ 外.} \end{cases}$$

考虑板置于半无限域流体的刚性边界面上，且在低频范围内忽略流体的可压缩性，则可以得到流体压力用板面法向位移来表达的积分方程式(见文献〔6〕)：

$$P = -\frac{\rho_l \omega^2}{2\pi} \iint_\Omega \frac{1}{r} W \mathrm{d}\Omega \tag{5}$$

式中，ρ_l 为流体密度，r 是参考点到场点之间的距离.

2 板耦合振动的离散化边界元模型

在板周边上取 N_B 个节点，区域内取 N_A 点；有 $m = 4$ 个角点，每个角点处有两个 $\partial W/\partial N$ 值，则对(3)，(4)，(5)式离散化后得到：

$$T_1[\partial W/\partial N] + T_2[R_n] = S_1 + T_3[\rho\omega^2 W - P] \tag{6}$$

$$T_4[\partial W/\partial N] + T_5[R_n] = S_2 + T_6[\rho\omega^2 W - P] \tag{7}$$

$$[W_{内}] = S_3 + T_7[\partial W/\partial N] + T_8[R_n] + T_9[\rho\omega^2 W - P] \tag{8}$$

$$[P] = \omega^2 T_{10}[W] \tag{9}$$

式中，$[R_n]$ 是周边 Γ 上 N_B 个元素的列向量；$[\partial W/\partial N]$ 是周边 Γ 上 $N_B + m$ 个元素的列向量；$[W]$ 为整个板面上 $N_A + N_B$ 个元素的列向量；$[P]$ 也是 $N_A + N_B$ 个元素的列向量；$[W_{内}]$ 是区域内部 N_A 个元素的列向量. S_1：N_B 个元素；S_2：$N_B + m$ 个元素；S_3：N_A 个元素；这

3 个列向量由已知外载 Q 决定. 其余 $T_1 \sim T_{10}$ 各矩阵的结构(行 × 列)与上述向量维数对应(从略).

从(6), (7)两式中通过变换将〔$\partial W/\partial N$〕与〔R_n〕用常数项及〔$\rho\omega^2 W - P$〕向量来表示，然后代入(8)式中，求得：

$$[W_{内}] = S + T[\rho\omega^2 W - P] \tag{10}$$

再将(9)式代入上式，得到：

$$[W_{内}] = S + T[\rho\omega^2 I - \omega^2 T_{10}][W] \tag{11}$$

其中，S, T 是由 $S_1, S_2, S_3, T_1 \sim T_{10}$ 各个列向量或矩阵式确定的，与振动频率 ω 无关. I 为单位矩阵；T_{10} 也是与频率无关的矩阵式. 因此在不同频率下，无须对几个系数矩阵式重新求解. 考虑到简支边界条件下〔$W_{边}$〕为零，从而由(11)式解出〔$W_{内}$〕，即确定了强迫力作用下耦合振动的解. 此解法确实简便实用.

对于不同边界形状、边界条件，不同流体域的板振动问题，亦可循本文中上述思路与步骤，稍加变动后建立求解之数学模型.

3　计算实例及分析

根据前面导出的计算公式，作者编制了 FORTRAN 语言计算程序，在中山大学计算中心 M 340 计算机上作了实例计算. 对简支方板，每边分为 8 段，共 32 个边界节点，49 个内部节点，64 个区域单元，对每个单元的高斯积分取 4 个高斯点. 在上机人数较少情况下，完成至方程(11)式所有各系数矩阵需时约 15 min，随后每增加一个频率点的计算时间约为 5 s. 因此，对多个频率点的计算甚为方便快捷.

3.1　真空中板的强迫振动

为校验本文方法在动力问题计算中的有效性，选取一四边简支方板，边长 $a = 4$ m，受面均布载荷 $q = 2943\exp(j\omega t)$N 的作用，板的抗弯模量 $D = 4.62 \times 10^6$ N · m^2/m，面密度 $\rho = 1150$ kg/m^2，泊松比 $\nu = 1/6$，求出板中心点挠度如表 1 所示，与文献[8]中给出的理论解吻合甚好.

表 1　方板受均布载荷简谐激励下的中心点挠度值

Tab. 1　The center displacement of square plate under harmonic exciting of uniform load

ω /r · min^{-1}	0	100	400	700
解析解[8] /cm	0.657	0.674	0.922	5.42
本文计算值 /cm	0.654	0.666	0.914	4.45
相对误差 /%	0.46	1.19	0.87	17.9

3.2　水中板的耦合振动

取简支方板边长 $a = 34.3$ cm，厚度 $h_0 = 0.16$ cm，材料为铝，$E = 7.2406 \times 10^{10}$ N/m^2，$\nu = 0.3$. 表 2 是在板厚度 h 变化情况下其第 1 阶自振频率的变化情况. 计算中取水的密度 $\rho_1 = 1000$ kg/m^3，铝的密度为 2700 kg/m^3. 面均布载荷为 1000 N/m^2(幅值).

表2 厚度变化对板耦合振动的影响

Tab. 2 Effection on the coupled vibration of plate by changing its thickness

厚度比 h/h_0	1	2	4	8	16
共振频率(水中)计算值/Hz	11.2	30.8	85.6	230.7	603.2
共振频率(真空中)理论解/Hz	66.5	132.9	265.9	531.8	1063.5
静力作用下板中心点挠度/m	0.204E-2	0.256E-3	0.318E-4	0.39E-5	0.5E-6
板中心点附加质量系数	25.6	12.8	6.4	3.2	1.6

从表2中可以看到，静力作用下板中心点挠度刚好与厚度的三次方成反比；由于作用在板上的流体压力P仅与$\ddot{W}$有关(成正比)，与板厚h无关，故计算出的流体压力P与惯性力$\rho_l h\ddot{W}$之比(附加质量系数)与厚度h成反比，板越厚则流体对它的耦合影响就越小. 上述两点均与理论预计的现象一致. 还可看到板越薄，它在水中第一阶自振频率的降低幅度亦大.

文〔3〕中给出了简支方板在水中与空气中各阶自振频率的实测结果. 板尺寸为 400 mm × 400 mm × 2.2 mm，材料为钢，密度 7762.83 kg/m^3，$E = 2.07 \times 10^{11}$ N/m^2，$\nu = 0.3$. 表3中列出了本文计算值与文献〔3〕的实验结果对比，两者相接近. 导致误差的原因有2个方面：一是本文计算中假设板置于无限大刚性平面上，水域为半无限空间，而实验中是将板置于有限容积的试验水池中，二是实验装置本身存在一定的误差.

表3 水中板共振频率测量值与计算值比较

Tab. 3 Comparison results of resonant frequencies in water by experimental and numerical methods

振动模式	(1, 1)	(1, 3), (3, 1)	(3, 3)
真空中 $f_{理}$/Hz	67.5	337.5	607.5
水中测量值 $f_{测}$/Hz	33	164	311
水中计算值 $f_{计}$/Hz	19.98	154.4	285.42

4 结论

本文以静力问题的边界元法为基础，建立了一种高效率的弹性薄板与流体耦合振动边界元算法模型. 特别适用于快速地计算多个频率点下板面挠度、压力分布.

参考文献

1 孙明光. 水中平板的弹性振动. 中山大学学报(自然科学版)，1980，3:26～33

2 何祚镛. 水声作用下矩形弹性——粘弹性复合板的振动和散射声近场(Ⅰ). 声学学报，1985，10(6):344～357

3 李敬芳，何祚镛.有限复合阻尼结构板的被激振动与声辐射的研究，哈尔滨，哈尔滨船舶工程学院硕士论文，1987

4 徐卫华，赵键，陈树坚.薄板振动的边界元法.中山大学学报(自然科学版)，1993，32(2)：18～23

5 Leissa A W. Vibration of Plates, NASA, 1969, SP-160,330P

6 何祚镛，赵晋英译.水声学波动问题.北京：国防工业出版社，1983

7 许永林，唐锦春.边界积分直接法解板的弯曲问题.浙江大学学报，1985，19(12)：43～53

8 曹国雄.弹性矩形薄板振动.北京：中国建筑工业出版社，1983

Research on BEM for Coupled Vibration of Thin Plate and Incompressible Fluid

Zhao Jian*

Abstract In this paper, the coupled vibration of thin elastic plates submerged in incompressible fluid are studied. Both the plate vibrating inertia and fluid pressure are represented in term of surface distributing loads. Thus a special high efficient Boundary Element Method(BEM) is obtained, and is proven by numerical examples.

Keywords BEM, thin plates, coupled vibration

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275