

求阶跃多模光纤特征方程数值解的简捷方法

傅思镜 罗 淳 梁丽贞

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘 要 介绍求阶跃折射率多模光纤特征方程数值解的一种简捷方法. 整个计算程序 281 行, 占用内存空间 8716 字节, 运行仅用 152 s.

关键词 阶跃折射率, 光纤, 特征方程, 数值解

分类号 TP391, O436, TN25

1 阶跃折射率光纤的模式理论概述

光传播场在阶跃折射率光纤圆柱形介质的边界条件为

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & r \leq a & \text{纤芯} \\ n_2 & r > a & \text{包层} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $2a$ 为光纤的芯径, n_1 、 n_2 分别为纤芯和包层介质折射率. 由麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

出发可导出直角坐标下的标量波动方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (3)$$

式中, $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. 由于光纤是圆柱形波导, 设光波沿 z 方向(光纤轴线)传输. 对于 E_z 和 H_z 分量应满足圆柱坐标系中的标量波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \beta^2) \psi = 0 \quad (4)$$

式中 β 是纵向传输常数. 用分离变量法求解此方程, 令

$$\psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

(4) 式可以写为

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + (k^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2})R(r) = 0 \quad (5)$$

而 $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, m 为整数, $m = 1, 2, 3 \dots$. (5) 式可化为贝塞尔方程, 在特定的边界条件(1)下求解 $R(r)$, 便可得到阶跃折射率光纤的模式情况. 在光纤纤芯中, 考虑到沿半径方向的波导场为驻波分布, 且 $r = 0$ 处的波导场为有限值, 选择第一类贝塞尔函数 $J_{m(\text{cr})}$ 作

为解. 在光纤包层中, 考虑到波导场沿半径方向随 r 的增大而衰减, 且不会到达包层外部, 选取第二类贝塞尔函数 $K_{m(cz)}$ 作为解, 因而

$$R(r) = \begin{cases} J_m(\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} r) & r \leq a \text{ 纤芯} \\ K_m(\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} r) & r > a \text{ 包层} \end{cases}$$

可见 $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$, 对于弱导行光纤 $n_1 \approx n_2$, 我们采用 Gloge 提出的光纤中传输模式的近似解^[1]——LP 模(Linearly polarized mode), LP_m 代表线性偏振模, m 表示贝塞尔函数的阶, n 为 m 阶贝塞尔函数根的序号, 即该种模式的光场沿半径 r 方向出现驻波波腹值的个数.

必须指出 LP_m 模是由矢量模线性叠加而成的线性偏振模. LP_m 模的传输特性可以近似地代表矢量模的传输特性, 但是矢量模才是阶跃折射率光纤中的精确模, 才能真正表示光纤中电磁场分布状态, 而矢量模的传输特性由它自身的特征方程决定. 经过运算得到

$$\left[\frac{1}{u} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] \left[\frac{n_1^2}{u n_2^2} \frac{J'_m(u)}{J_m(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \right] = m^2 \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (6)$$

式中的“'”符号表示对宗量的微分. 并且定义

$$k_0 = w/c, \quad u = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} a, \quad w = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} a$$

c 为真空中的光速, k_0 表示真空中光传播的波数, u 和 w 的物理意义是: u/a 相当于纤芯中的横向传输常数, w/a 相当于光纤包层中的横向传输常数. u 和 w 与归一化频率 V 有如下的关系: $V = \sqrt{u^2 + w^2} = a k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. 引入

$$J = J'_m(u)/uJ_m(u) \quad K = K'_m(w)/wK_m(w)$$

(6) 式变形为

$$J + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) K \pm \left[\left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right)^2 K^2 + 4m^2 \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0 \quad (7)$$

这就是矢量模的特征方程. 当 $m \neq 0$ 时, (7) 式根号项取正号, 即 HE_m 模的特征方程, 取负号即 EH_m 模的特征方程; 当 $m = 0$ 时, (7) 式根号项取正号, 即 TM₀ 模的特征方程, 取负号即 TE₀ 模的特征方程. 这里 m 表示圆周方向的模数, n 表示径向模数.

2 程序和算法说明

用 $(-1)^l$ 替换(7)式中根号项前的正负号; 取 $l = 1$ 为负号; 取 $l = 2$ 为正号; 用 $\sqrt{v^2 - u^2}$ 置换 w , 超越方程(7)写作:

$$J + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) k + (-1)^l \left[\left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) k^2 + 4m^2 \left(\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{v^2 - u^2} + \frac{1}{u^2} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2 - u^2} \right) \right]^{1/2} \right\} = 0 \quad (8)$$

其中 J 是 m, u 的函数, k 是 $m, \sqrt{v^2 - u^2}$ 的函数.

对于给定的光纤, n_1, n_2, a 是固定的. 对于给定的光纤中传导的某种模式, (8) 式中 m, l 的值也是固定的.

HE₁₁, HE₁₂ 对应为 $m = 1, l = 2$; HE₂₁, EH₂₂ 对应为 $m = 2, l = 2$; EH₃₁ 对应为 $m = 3,$

$l = 2$; HE_{41} 对应为 $m = 4, l = 2$; HE_{11} 对应为 $m = 1, l = 1$; HE_{21} 对应为 $m = 2, l = 1$; TE_{01} , TE_{02} 对应为 $m = 0, l = 1$; TM_{01}, TM_{02} 对应为 $m = 0, l = 2$;
各矢量模的分布如图 1 所示.

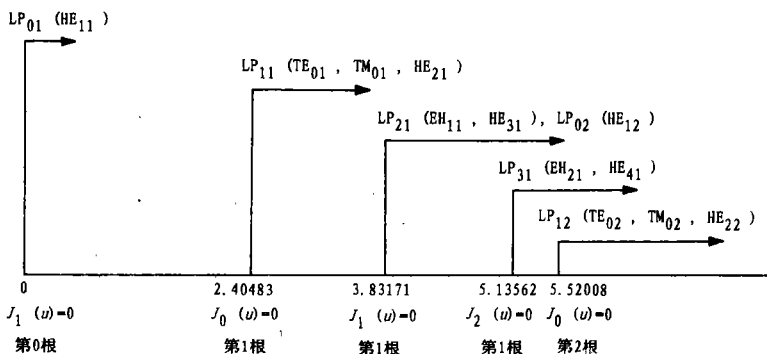


图 1 LP_{nm} 模及其矢量模分布图

Fig. 1 The distributing diagram of LP_{nm} - mode and its vectorial mode

由此, 我们可以确定各矢量模的截止频率 $V_{c0} \sim V_{c4}$.

2.1 程序功能 求上述 12 种矢量模在 $V \geq V_c$ 下的特征方程(7) 对应的根 u , 代入

$$\beta/k_0 = \sqrt{n_1^2 - (n_1^2 - n_2^2 u^2 / v^2)}$$

得到归一化传输常数 β/k_0 . V 取不同的值, 计算各模式相应的 $\beta/k_0 - V$ 值, 最后绘出 β/k_0 关系曲线. 整个程序包括主程序和若干子模块, 各模块间层次关系如图 2.

2.2 使用说明 输入参数: y_{n1}, y_{n2} , 纤芯和包层折射率 n_1, n_2 .

输出参数: bn, 归一化传输常数 β/k_0 ;
VV, 归一化频率 V ; 数组 $V_c(0:4)$, 截止频率 $V_{c0} \sim V_{c4}$.

运行程序, 屏幕提示输入 y_{n1}, y_{n2} 的值, $y_{n1} > y_{n2}, y_{n1} \approx y_{n2}$. 输入后, 运行结果显示截止频率 $V_{c0} \sim V_{c4}$ 值, 显示 VV 及对应的各模式特征方程根(“/ /”内)和 bn 值, 并作 12 个低次模的 $\beta/k_0 - V$ 曲线图, 即图 3.

2.3 各模块功能与算法 ① 子程序 ntii 计算并打印截止频率 $V_{c0} \sim V_{c4}$, 其中使用了迭代计算方法. ② 子程序 bbess 计算贝塞尔函数 $J_m(z)m!$ 值, 其中使用了递推计算方法. ③ 子程序 half 计算矢量模的 $\beta/k_0(V)$ 值. 在区间 $[x_a, x_b]$ 使用了对半法反复调用子程序 bds 查找模式对应的特征方程的根. ④ 子程序 bds 计算(8)式左边值 f_z , 其中利用了贝塞

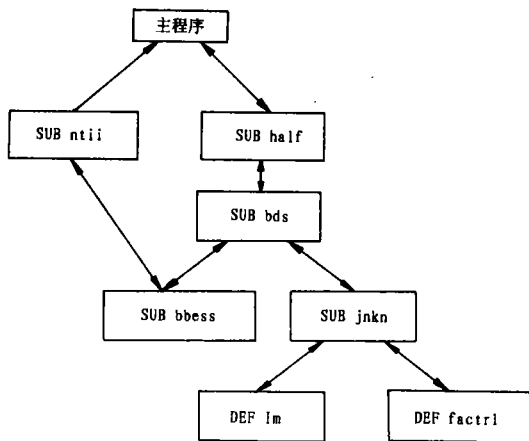


图 2 计算多模光纤 $\beta/K_0 - V$ 曲线程序各模块层次图

Fig. 2 The grading diagram of mode block for calculating $\beta/K_0 - V$ program in multi-mode optical fiber

尔函数的递推关系. ⑤ 子程序 jnkn 计算第二类变型贝塞尔函数 $k_m(n)$, 其中使用了该函数的递推公式. ⑥ 库函数 Im(m, x) 计算虚宗量贝塞尔函数 Im(x) 的值, $m = 0$ 或 1. 运用了同子程序 bbess 相同的递推方法. ⑦ 库函数 factrl(n) 计算阶乘 $n!$.

2.4 计算程序运行结果数据表

```

input n1, n2(n1 >= n2)
yn1 = 1.51
yn2 = 1.5
cut off frequency:
Vco = 0  Vc1 = 2.4083  Vc2 = 3.83171
Vc3 = 5.13562  Vc4 = 5.52008
B/k0 by v and root u:
vv = 0.6  bn = /0.599902  /HE11:1.5
vv = 1.1  bn = /1.06104  /HE11:
1.5007
vv = 1.6  bn = /1.36914  /HE11:
1.50268
vv = 2.1  bn = /1.56211  /HE11:
1.50447
vv = 2.6  bn = /1.69556  /HE11: 1.50577 /2.53497 /TE01: 1.5005 /2.53562 /
TM01: 1.50049 /2.53766 /HE21: 1.50048
vv = 3.1  bn = /1.79219 /HE11:1.50667 /2.75567 /TE01:1.5021 /2.75837 /
TM01: 1.50209 /2.76039 /HE21:1.50208
vv = 3.6  bn = /1.86094 /HE11: 1.50733 /2.90273 /TE01:1.50351 /2.90738 /
TM01: 1.50349 /2.90738 /HE21: 1.50349
vv = 4.1  bn = /1.92109 /HE11:1.50781 /3.01285 /TE01: 1.50461 /3.01762/
TM01: 1.50459 /3.02 /HE21: 1.50458
vv = 4.6  bn = /1.96406 /HE11: 1.50818 /3.09625 /TE01: 1.50548 /3.10102/
TM01: 1.50546 /3.09625 /HE21: 1.50548
...
vv = 6.65  bn = /5.46228 /EH21: 1.50326 /5.47349 /HE41: 150323 /592315 /
TE02: 150207 /5.92753 /TM02: 1.50206 /5.92315 /HE22:1.50207
program last 152.15 scs

```

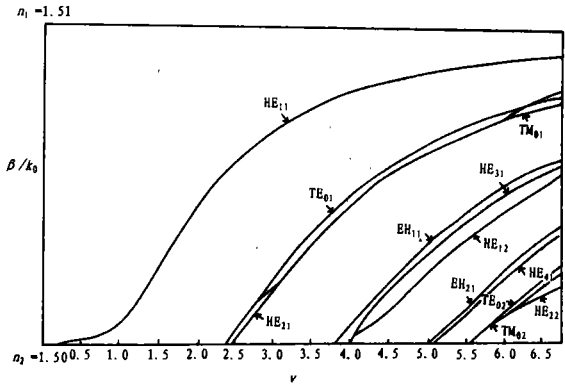


图 3 阶跃型多模光纤特征方程的数值解图

Fig. 3 The diagram for the numerical value solution of characteristic equation in step index multi - mode optical fiber

3 算法和程序特点的分析讨论

(1) 算法安排合理, 计算模块综合运用巧妙, 程序占用内存空间小, 运行速度快. 我们用 Ture Basic 语言编写此计算程序, 运用了一个主程序和五个子程序模块, 调用关系简单. 程序共 281 行, 占内存 8716 byte, 在 486 DX 33 微机上运行时间仅 152 s, 这结果比目前看到出现的同类程序要好得多.

(2) 计算结果精确合理. 目前许多有关多模光纤传输模式的书籍, 往往画出 $\beta/k_0 - V$ 曲线, 而多数图形可能由于当时计算机型等原因的限制, 影响图的分辨率, 不能区分小数.

点后第三甚至第二位以后的数据差异,所以同一模式群的模式传输曲线重合在一起. 本研究的结果与多数文献^[2,3]提供的图形及 Gloge 等人^[1,4]的相关计算结果吻合得很好,而分辨率有较大提高.

参 考 文 献

- 1 Gloge D. Weakly Guiding Fibers. Appl Opt 1971,10:2252
- 2 顾毓仪,李国瑞. 光纤通信系统. 北京:人民邮电出版社,1989. 35
- 3 李泽民. 光纤通信(原理和技术). 北京:科学技术文献出版社,1992. 624
- 4 魏继明. 光纤通信. 石家庄:河北科学技术出版社,1994. 27

A Simple and Direct Method for Numerical Solution of Characteristic Equation in Step Index Multi-mode Optical Fiber

Fu Sijing Luo Chun Liang Lishen*

Abstract This paper introduces a simple and direct method for the numerical solution to the characteristic equation in a step index multi-mode optical fiber. The 281-line-program takes up internal memory 8716 bytes and it 152 seconds computer execution time. The result is show to be reasonable and accurate.

Keywords step index, optical fiber, characteristic equation, numerical solution

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275