第35卷 第2期
1996年 3月

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM
UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 35 No. 2
Mar. 1996

双调和方程的 Phragmén – Lindelöf 二择性定理

蔡崇喜
(中山大学应用力学与工程系，广州 510275)

林长好
(华南师范大学数学系)

摘 要 对平面半无限带状区域上的双调和方程边值问题的能量积分的 Phragmén – Lindelöf 二择性定理，证明了随着与区域有限端距离的增长，能量或者按指数式增长或者按指数式衰减. 对衰减情况，求出全能量积分的显式上界.

关键词 双调和方程，能量积分估计，Phragmén – Lindelöf 二择性

分类号 O175.2，O351.2

1 引 言

假设 R 是平面上的半无限带状区域

$$R=\{(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_1<+\infty,\ 0\leqslant x_2\leqslant h\}$$

考虑建立在 R 上的双调和方程边值问题

$$\triangle^2\Phi\equiv\Phi_{,\alpha\alpha\beta\beta}=0,\qquad 在\ R\ 上 \tag{1}$$

$$\Phi(x_1,0)=\Phi_{,2}(x_1,0)=\Phi(x_1,h)=\Phi_{,2}(x_1,h)=0,\quad x_1\geqslant 0, \tag{2}$$

$$\Phi(0,x_2)=f(x_2),\quad \Phi_{,1}(0,x_2)=g(x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant h, \tag{3}$$

这里采用通常的数学符号：逗号“，”表示求导，重复下标表示求和. (3) 中 f 和 g 是给定函数，且满足相容条件

$$f(0)=f(h)=f'(0)=f'(h)=g(0)=g(h)=0 \tag{4}$$

双调和方程的两个熟知的力学背景是[1]：① 在平面区域上各向同性的弹性应变分析中，Airy 函数满足双调和方程；② 平面区域上的定常 stokes 方程，可以通过变换描述为双调和方程. 由于双调和方程在应用上的重要性，多年来有着广泛的研究[1~3]. 这些研究主要集中于双调和方程解的 Saint – Venant 原则，即证明：如果(1) 的一个解在带状区域的双侧长边界上满足齐次 Dirichlet 条件，并且在无限远处满足给定的衰减假设

$$\Phi_{,\alpha},\qquad \Phi_{,\alpha\beta}\rightarrow 0(对\ x_2\ 一致)\ 当\ x_1\rightarrow\infty\ 时 \tag{5}$$

那么，解 $\Phi(x_1,x_2)$ 将随着 x_1 的增长而呈指数式衰减. 显然假设(5) 是人为加上去的，并不切合实际. 本文的主要结果是：无需衰减假设条件(5)，对边值问题(1)～(3) 的解证明了

收稿日期：1995-02-20　　蔡崇喜，男，50 岁，副教授

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

Phragmén - Lindelöf 二择性定理:随着 x_1 的增长,Φ 的能量积分必定或者呈指数式增长,或者呈指数式衰减.

2 预备知识

以 L_z 表示带状区域 R 在 $x_1 = z$ 处的截线

$$L_z = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = z \geqslant 0,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$$

应用分部积分及边界条件(2),(3),得到

$$0 = \int_0^z \int_{L_\xi} \Phi \triangle^2 \Phi \mathrm{d}A = \int_{L_z} (\Phi\Phi_{,\alpha\alpha 1} - \Phi_{,\alpha}\Phi_{,\alpha 1})\mathrm{d}x_2 - \int_{L_0} (\Phi\Phi_{,\alpha\alpha 1} - \Phi_{,\alpha}\Phi_{,\alpha 1})\mathrm{d}x_2 + \int_0^z \int_{L_\xi} \Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A \tag{6}$$

由(6),定义函数

$$E_1(z) = -\int_{L_z} (\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\alpha 1} - \Phi\Phi_{,\alpha\alpha 1})\mathrm{d}x_2 = -\int_0^z \int_{L_\xi} \Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A + E_1(0) \tag{7}$$

类似(6),(7),定义函数

$$E_2(z) = -\int_{L_z} (\Phi_{,\alpha\alpha}\Phi_{,\alpha\alpha 1}\mathrm{d}x_2 - \int_0^z \int_{L_\xi} \Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A + E_2(0) \tag{8}$$

进而,定义函数

$$E(z) = E_1(z) + \lambda E_2(z) = -\int_0^z \int_{L_\xi} (\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \lambda\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})dA + E_1(0) + \lambda E_2(0) \tag{9}$$

这里 λ 是待定正常数.

对(9)求导,显然有

$$E'(z) = -\int_{L_z} (\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \lambda\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}x_2 \leqslant 0 \tag{10}$$

由定义(9),对任意 $z > z_1 > 0$,得到

$$E(z) - E(z_1) = -\int_{z_1}^z \int_{L_\xi} (\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \lambda\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A \tag{11}$$

假设当 $z \to \infty$ 时,$E(z) \to 0$,由(11)立即得到

$$E(z) = \int_z^\infty \int_{L_\xi} (\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \lambda\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A \tag{12}$$

(12)表示能量积分

假设 $-E(z)$ 有下界 $\chi(z) > 0$,由(11)立即得到

$$\int_0^z \int_{L_\xi} (\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \lambda\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A \geqslant \chi(z) + E(0) \tag{13}$$

下面需要用到以下熟知的 Winginter 不等式[1]

(i) 若 $u(x_2) \in C'(0,h)$,且 $u(0) = u(h) = 0$,那么

$$\int_0^h u^2 \mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^h u_{,2}^2 \mathrm{d}x_2 \tag{14}$$

(ii) 若 $u(x_2) \in C^2(0,h)$,且 $u(0) = u_{,2}(0) = 0$,$u(h) = u_{,2}(h) = 0$,那么

$$\int_0^h u_{,2}^2 \mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h^2}{4\pi^2} \int_0^h u_{,22}^2 \mathrm{d}x_2 \tag{15}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

(iii) 若 $u(x_2)$ 满足与(ii)一样的边界条件，那么

$$\int_0^h u^2 \mathrm{d}x_2 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{h^4}{\pi^4} \int_0^h u_{,22}^2 \mathrm{d}x. \tag{16}$$

3　Phragmén - Lindelöf 二择性定理

这一节，将建立本文的主要结果.

由定义(9)，显然有

$$|E(z)| \leqslant \left| \int_{L_z} (\Phi_{,1}\Phi_{,11}) + 2\Phi_{,2}\Phi_{,21} - \Phi\Phi_{,111})\mathrm{d}x_2 \right| + \left| \lambda \int_{L_z} (\Phi_{,11}\Phi_{,111} + \Phi_{,22}\Phi_{,221})\mathrm{d}x_2 \right| \tag{17}$$

应用 Schwarz 不等式，Winginter 不等式(14)～(16)以及 young 不等式，对(17)式右端各项得到

$$\int_{L_\xi} \Phi_{,1}\Phi_{,11}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\int_{L_z}\Phi_{,12}^2\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_{L_z}\Phi_{,11}^2\mathrm{d}x_2\right) \tag{18}$$

$$2\int_{L_z} \Phi_{,2}\Phi_{,21}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{2}\int_{L_z}\Phi_{,22}^2\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_{L_z}\Phi_{,12}^2\mathrm{d}x_2\right) \tag{19}$$

$$\int_{L_z} \Phi\Phi_{,111}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{4}{9}\frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\int_{L_z}\Phi_{,22}^2\mathrm{d}x_2 + \frac{h^2}{\lambda\pi^2}\frac{1}{2\varepsilon_3}\lambda\int_{L_z}\Phi_{,111}^2\mathrm{d}x_2\right) \tag{20}$$

$$\lambda\int_{L_z} \Phi_{,11}\Phi_{,111}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_4}{2}\int_{L_z}\Phi_{,11}^2\mathrm{d}x_2 + \frac{\lambda\pi^2}{2\varepsilon_4 h^2}\lambda\int_{L_z}\Phi_{,111}^2\mathrm{d}x_2\right) \tag{21}$$

$$\lambda\int_{L_z} \Phi_{,22}\Phi_{,221}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_5}{2}\int_{L_z}\Phi_{,22}^2\mathrm{d}x_2 + \frac{\lambda\pi^2}{2h^2\varepsilon_5}\cdot\lambda\int_{L_z}\Phi_{,122}^2\mathrm{d}x_2\right) \tag{22}$$

取待定系数 $\lambda = \dfrac{h^2}{4\pi^2}$，并分别取

$$\varepsilon_1 = 1;\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2};\ \varepsilon_3 = \frac{16}{9};\ \varepsilon_4 = \frac{1}{2};\ \varepsilon_5 = 6.$$

综合(17)～(22)得出

$$|E(z)| \leqslant \frac{3h}{4\pi}[-E'(z)] \tag{23}$$

(23)等价于

$$[\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3h}}E(z)]' \leqslant 0 \quad 或 \quad [\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}E(z)]' \leqslant 0 \tag{24}$$

对(24)左式从 0 到 z 积分，得出

$$E(z) \leqslant E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z} \tag{25}$$

由(25)可见，当 $z \to \infty$ 时，$E(z) \to 0$，由(12)得到

$$\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A + \frac{h^2}{4\pi^2}\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A \leqslant E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z} \tag{26}$$

(26)显示能量积分的衰减估计. 应用 L'Hospital 法则，可以得到区域截线上的能量积分衰减估计

$$\int_{L_z}\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{4\pi}{3h}E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z} \tag{27}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

及高阶能量衰减估计

$$\int_{L_z} \Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{16\pi^3}{3h^3}E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z} \tag{28}$$

对任意 $z > z_0 > 0$，将(24)右式从 z_0 到 z 积分，得到

$$-E(z) \geqslant -E(z_0)\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3h}(z-z_0)}$$

由(13)，得到

$$\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}\int_0^z\int_{L_\xi}(\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \frac{h^2}{4\pi^2}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A\right] \geqslant C_1$$

这里 C_1 是依赖于 z_0 的常数

$$C_1 = \mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}\int_0^z\int_{L_0}(\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \frac{h^2}{4\pi^2}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A$$

综上所述，得到 Phragmén - Lindelöf 二择性定理.

定理 1 若 Φ 是双调和方程边值问题(1) ～ (3)的解，那么 Φ 必定满足

$$\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}\int_0^z\int_{L_\xi}(\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \frac{h^2}{4\pi^2}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A\right] \geqslant C_1$$

或

$$\int_z^\infty\int_{L_\xi}(\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + \frac{h^2}{4\pi^2}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta})\mathrm{d}A \leqslant E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}.$$

4 应 用

当 $E(z)$ 按指数式衰减时，可以进一步得到解 $\Phi(x_1,x_2)$ 的点点衰减估计.

显然，对固定的 $z \geqslant 0$，

$$\Phi^2(z,x_2) = -2\int_{x_2}^h \Phi\Phi_{,\eta}\mathrm{d}\eta = 2\int_0^{x_2}\Phi\Phi_{,\eta}\mathrm{d}\eta \tag{29}$$

应用 Schwarz 不等式及不等式(14)，得到

$$\Phi^2(z,x_2) \leqslant \int_0^h |\Phi\Phi_{,\eta}|\mathrm{d}\eta \leqslant \frac{h}{\pi}\int_0^h \Phi_{,2}^2\mathrm{d}x_2 \tag{30}$$

由(26)知，(30)的最右端项当 $z\to\infty$ 时趋于 0，因而进一步可得

$$\int_{L_z}\Phi_{,2}^2\mathrm{d}x_2 = -2\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,2}\Phi_{,21}\mathrm{d}A \leqslant \frac{h}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{2}\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,12}^2\mathrm{d}A + \frac{1}{2\varepsilon}\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,22}^2\mathrm{d}A\right)$$

取 $\varepsilon = \sqrt{2}$，由定理 1 得到 Φ 的点点衰减估计

$$\max_{0\leqslant x_2\leqslant h}\Phi^2(z,x_2) \leqslant \frac{\sqrt{2}h^2}{4\pi^2}E(0)\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3h}z}$$

如果问题(1) ～ (3)考虑平面上的弹性分析，由定理 1，可以得到平面弹性体的应力在截线上的均方衰减估计. 如果问题(1) ～ (3)考虑定常的 Stokes 流问题，由定理 1，可以得到 Stokes 流速度 v 的最大模的衰减估计.

5 全能量积分 $E(0)$ 的上界

在上述中，得到了衰减的能量积分以 $E(0)$ 为上界. 为了保证 $E(0)$ 的有界性，有必要求出以边值数据表示的 $E(0)$ 的显式上界. 由上可知

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.

$$E(0)=E_1(0)+\frac{h^2}{4\pi^2}E_2(0)=$$

$$\int_0^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A+\frac{h^2}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A$$

先证明

定理 2　假设 Φ 是边值问题(1)～(3)的解，且能量积分 $E(z)$ 当 $x\to\infty$ 时衰减为零，则对任意 $z_0>0$，$E_1(z)$ 和 $E_2(z)$ 满足如下关系

$$z_0^2E_2(z+z_0)\leqslant E_1(z).$$

证明　反复应用分部积分及散度定理，得

$$0=\int_z^\infty\int_{L_z}(\xi-z)^2\Phi_{,11}\triangle^2\Phi\mathrm{d}A=-\int_z^\infty\int_{L_\xi}(\xi-z)^2\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A+$$

$$\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A-2\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,12}^2\mathrm{d}A \tag{31}$$

由(31)可以推出

$$E_1(z)=\int_z^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A\geqslant\int_z^\infty\int_{L_\xi}(\xi-z)^2\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A>$$

$$\int_{z+z_0}^\infty\int_{L_\xi}(\xi-z)^2\Phi_{,1\alpha\beta}\Phi_{,1\alpha\beta}\mathrm{d}A>z_0^2E_2(z+z_0)$$

于是定理 2 得证.

定理 2 蕴涵 $E_2(0)$ 可以由 $E_1(0)$ 界定，即 $E_2(0)\leqslant 2E_1(0)$. 因此要求 $E(0)$ 之显式上界，只需求 $E_1(0)$ 之显式上界.

设 $\psi(x_1,x_2)$ 是一个光滑函数，满足与 $\Phi(x_1,x_2)$ 相同的边界条件：

$$\psi(x_1,0)=\psi_{,2}(x_1,0)=\psi(x_1,h)=\psi_{,2}(x_1,h)=0,\qquad x_1\geqslant 0, \tag{32}$$

$$\psi(0,x_2)=f(x_2),\quad \psi_{,1}(0,x_2)=g(x_2),\qquad 0\leqslant x\leqslant h, \tag{33}$$

$$\psi_{,\alpha},\quad \psi_{,\alpha\beta}\to 0(\text{对 } x_2 \text{ 一致})\quad \text{当 } x_1\to+\infty \text{ 时} \tag{34}$$

应用 Schwarz 不等式，可以得到

$$\left(\int_0^\infty\int_{L_\xi}\Phi_{,\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A\right)^2\leqslant E_1(0)\int_0^\infty\int_{L_\xi}\psi_{,\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A \tag{35}$$

另方面，由定义(7)及边值条件(32)～(34)，结合(35)，得到

$$E_1(0)\leqslant\int_\infty 0\int_{L_\xi}\psi_{,\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A \tag{36}$$

构造函数 $\psi(x_1,x_2)$，使

$$\psi(x_1,x_2)=[f(x_2)+x_1g(x_2)+rx_1f(x_2)]\mathrm{e}^{-rx_1}$$

这里 $r>0$ 是待定参数. 显然 $\psi(x_1,x_2)$ 满足边值条件(32)～(34). 将 $\psi(x_1,x_2)$ 代入(36)右端积分可以计算出 $E_1(0)$ 的上界.

$$E_1(0)\leqslant\int_0^\infty\int_{L_\xi}\psi_{,\alpha\beta}\psi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A=\frac{1}{2r}\int_0^h[f''f''+2g'g'+r^2(2g+rf)^2]\mathrm{d}x_2+$$

$$\frac{1}{2r^2}\int_0^h[f''(g''+f'')-2rg'(g'+rf')-r^3(g+rf)(2g+rf)]\mathrm{d}x_2+$$

$$\frac{1}{4r^3}\int_0^h[(g''+rf'')^2+2r^2(g'+rf')^2+r^4(g+rf)^2]\mathrm{d}x_2$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.

不妨取 $r=1$，这样可以得到更简单的结果

$$E_1(0) \leqslant \frac{1}{4}\int_0^h (5f''f''+4f''g''+g''g'')\mathrm{d}x_2+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^h (f'f'+g'g')\mathrm{d}x_2+\frac{1}{4}\int_0^h (5g^2+4fg+f^2)\mathrm{d}x_2.$$

因此，$E(0)$ 有显式上界.

参考文献

1 Horgan C O. Decay estimate for the biharmonic equation with application to Saint — Venant's principle in plane elasticity and Stokes flows. Quart Appl Math, 1989,47:147 ~ 157

2 Knowles J K. An energy estimate for the biharmonic equation and its application to Saint — Venant's principle in plane elaslostic. Indian J Pure Appl Math, 1983,14:791 ~ 805

3 Lin Changhao. Eneygy estimates for the biharmonic equation in three dimensions. Quart Appl Math, 1994,52:649 ~ 663

A Phragmén – Lindelöf Alternative Theorem for the Biharmonic Equation

Cai Chongxi *   *Lin Changhao*

Abstract We derive a alternative phragmén – Lindelöf theorem for energy expressions of solutions of a biharmonic boundary value problem in a semi – infinite strip, i. e we prove energy must either grow exponentially or decay exponentially with the distance from the finite end of the strip. For the case of decay, we also present a method of obtaining explicit upper bound of the total energy.

Keywords biharmonic equation, energy integral estimate, phragmén – Lindelöf alternative

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www