

极限环及同宿分叉的摄动 - 增量解法^{*}

徐 兆 陈树辉

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 采用摄动 增量法研究电机工程中一类强非线性振子的极限环和同宿轨线. 极限环、同宿轨线和分叉值均可以非常精确地计算.

关键词 极限环, 同宿轨线, 分叉值, 摄动 增量法

分类号 O 32

近 10 多年来, 下列强非线性振子

$$\ddot{x} + g(x) = \lambda f(x, \dot{x}, \tau) \dot{x} \quad (1)$$

的分析方法有很大进展, 其中 $g(x)$ 为非线性函数. 对于 λ 为小参数的情形有新渐近方法^[1]、非线性时间变换法^[2]、广义平均法^[3]、非线性尺度法^[4]和椭圆函数摄动^[5]等; 对于 λ 为不很大参数的情形有摄动-迭代法^[6]; 对于 λ 为任意参数的情形有摄动-增量法^[7]. 其中摄动-增量法是一种新方法, 它既可以给出简单的近似解, 也可以给出相当精确的解, 兼有解析法和数值法的优点.

本文将应用摄动-增量法研究电机工程中导出的强非线性振子

$$\ddot{x} + x + 1.5x^2 = \lambda (\tau + x) \dot{x} \quad (2)$$

对于 λ 为小参数的情形, 文献 [8] 证明了当 $0 < \tau < 2/21$ 时方程 (2) 有唯一的极限环. 由文献 [8] 进一步可证明 $\tau \approx 2/21$ 时极限环消失而出现同宿轨线, 即产生同宿分叉, $\tau = 2/21$ 为分叉值. 本文将研究 λ 不是小参数时的分叉值、同宿轨线和极限环的计算问题. 这是强非线性系统的一个重要研究课题.

1 摄动 增量法

先对一般方程 (1) 阐述求极限环的摄动-增量法. 假设方程 (1) 满足文献 [9] 存在极限环的条件且相平面的原点在极限环内, 作非线性时间变换

$$dh/dt = H(h), \quad H(h + \tau) = H(h) \quad (3)$$

其中 h 是新技术, 在 h 域内把极限环表示为

$$x = a \cos(h + b), \quad dx/dt = -aH(h) \sin h \quad (4)$$

这里, a 是振幅, b 是偏心. 类似于文 [2] 的推导, a 、 b 和 H 可由下列诸式确定.

* 中山大学高等学术中心香港基金 (96M10) 资助项目

收稿日期: 1996-08-19 徐兆 男, 60 岁, 教授

$$\int_0^h (H \sin h)^2 / 2 + [V(a \cos h + b) - V(a + b)] / a^2 - \lambda \int_0^\pi f(a \cos \theta + b, -aH(\theta) \sin \theta, -) H(\theta) \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (5)$$

$$V(a, b, \pi) - \lambda \int_0^\pi \bar{f}(a, b, -, H, \theta) d\theta = 0 \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{f}(a, b, -, H, \theta) d\theta = 0 \quad (7)$$

其中, $V(x) = \int_0^x g(-) du$, $V(a, b, h) = \frac{1}{a^2} [V(a \cos h + b) - V(a + b)]$

$$\bar{f}(a, b, -, H, \theta) = f(a \cos \theta + b, -aH \sin \theta, -) H \sin^2 \theta$$

具体计算可分 2 步. 第一步为摄动法. 假设 λ 为小参数, $\lambda \approx 0$, $a = a_0 + O(\lambda)$, $b = b_0 + O(\lambda)$, $H = H_0 + O(\lambda)$, 上式代入方程 (5-7) 得

$$H_0(h) = \{ [2V(a_0 + b_0) - 2V(a_0 \cos h + b_0)] / a_0^2 \sin^2 h \}^{1/2} \quad (8)$$

$$V(-a_0 + b_0) - V(a_0 + b_0) = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{f}(a_0, b_0, -, H_0, \theta) d\theta = 0 \quad (10)$$

解出 a_0 , b_0 和 H_0 后, 可得极限环的零阶近似解. 由此可得极限环的存在性、唯一性、稳定性和分叉等基本情况. 但摄动法仅适用于 λ 为小参数的情形.

第二步是参数增量法. 它将把对应于小参数的解延拓至大参数. 设 a_0 , b_0 和 H_0 为对应于参数 λ_0 的解 (开始时 $\lambda_0 = 0$, 对应零阶近似解). 现给 λ_0 一个小增量 $\Delta\lambda$, $0 < \Delta\lambda \ll 1$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, 对应的解记为

$$a = a_0 + \Delta a, b = b_0 + \Delta b, H = H_0 + \Delta H \quad (11)$$

把上式代入方程 (5-7), 略去高阶项后便得到增量方程

$$\begin{aligned} & [(\frac{\partial V}{\partial a})_0 - \lambda \int_0^h (\frac{\partial \bar{f}}{\partial a})_0 d\theta] \Delta a + [(\frac{\partial V}{\partial b})_0 - \lambda \int_0^h (\frac{\partial \bar{f}}{\partial b})_0 d\theta] \Delta b + (H_0 \sin^2 h) \Delta H - \\ & \lambda \int_0^h (\frac{\partial \bar{f}}{\partial H})_0 \Delta H d\theta = - (H_0 \sin h)^2 / 2 - V(a_0, b_0, h) + \lambda \int_0^\pi \bar{f}(a_0, b_0, -, H_0, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & [(\frac{\partial V}{\partial a})_{0,\pi} - \lambda \int_0^\pi (\frac{\partial \bar{f}}{\partial a})_0 d\theta] \Delta a + [(\frac{\partial V}{\partial b})_{0,\pi} - \lambda \int_0^\pi (\frac{\partial \bar{f}}{\partial b})_0 d\theta] \Delta b - \lambda \int_0^\pi (\frac{\partial \bar{f}}{\partial H})_0 \Delta H d\theta = \\ & - V(a_0, b_0, \pi) + \lambda \int_0^\pi \bar{f}(a_0, b_0, -, H_0, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta a \int_0^{2\pi} (\frac{\partial \bar{f}}{\partial a})_0 d\theta + \Delta b \int_0^{2\pi} (\frac{\partial \bar{f}}{\partial b})_0 d\theta + \Delta H \int_0^{2\pi} (\frac{\partial \bar{f}}{\partial H})_0 H_0 d\theta = - \int_0^{2\pi} \bar{f}(a_0, b_0, -, H_0, \theta) d\theta \quad (14)$$

其中, $(\frac{\partial V}{\partial a})_{0,\pi} = \frac{\partial}{\partial a} V(a, b, h) |_{a=a_0, b=b_0, h=\pi}$, $(\frac{\partial V}{\partial b})_{0,\pi}$ 等项类似定义. 由于 $H(h)$ 是 2π 的周期函数, 可展开为 Fourier 级数. 同样, ΔH 可展开为

$$\Delta H = \sum_{j=0}^M (\Delta P_j \cos jh + \Delta Q_j \sin jh), \Delta Q_0 = 0 \quad (15)$$

方程 (12-14) 中的周期函数也都可展为 Fourier 级数, 再应用谐波平衡法可得 Δa , Δb , ΔP_j 和 ΔQ_j 的线性代数方程组

$$A_n \Delta a + B_n \Delta b + A_{n,0} \Delta P_0 + \sum_{j=1}^M (A_{n,j} \Delta P_j + B_{n,j} \Delta Q_j) = R_n \quad (16)$$

其中, $n=0, 1, 2, \dots, 2M+2$, R_0 为 (12) 式右边的常数项, R_i 为余弦项, R_{M+i} 为正弦项的系数; R_{2M+1} 为 (13) 式右边的值; R_{2M+2} 为 (14) 式右边的值. 注意 (12~14) 式的右边与 (5)、(6) 和 (7) 的左边对应相差一个负号而已. 因此, 如果 a_0 , b_0 和 H_0 使 (12~14) 式的右边为零, 则 R_n 全为零. 此时 a_0 , b_0 和 H_0 就是方程 (5)、(6) 和 (7) 的解.

由 (16) 式解出 $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle P_j$ 和 $\triangle Q_j$ 后代入 (11) 式得 a , b 和 H 并作为新的 a_0 , b_0 和 H_0 . 于是由 (16) 式又可得新的 $\triangle a$, $\triangle b$, $\triangle P_j$ 和 $\triangle Q_j$. 这一过程称为迭代过程. 当 R_n 小于预先规定的误差时, 迭代结束, 此时得到对应于 $\lambda = \lambda_0 + \triangle \lambda$ 的解 a , b 和 H . 再以此作为新的起点, 给参数以增量 $\triangle \lambda$, 重复上述迭代过程, 经过若干次增量后, 参数 λ 由小变大, 这样就得到非小参数对应的解.

现在研究同宿轨线和分叉值的计算, 同宿轨线仍表示为 (14) 式, 但轨线上应有一个且只有一个平衡点, 设这个平衡点为 $(h, 0)$, 则 $a+h=b$, (当 $h>0$ 时), 或 $-a+h=b$ (当 $h<0$ 时) 即

$$ah \mp |h| + b = h \quad (17)$$

由于同宿轨线比极限环多一个条件 (17), 因此, 方程 (1) 的参数 λ 不能任意给定, 而要待定. 当 $\lambda \approx 0$ 时, 同宿轨线对应的 a_0 , b_0 , λ_0 和 H_0 除应满足方程 (8~10) 外, 还要满足

$$a_0 h \mp |h| + b_0 - h = 0 \quad (18)$$

令 $\lambda = \lambda_0 + \triangle \lambda$, $a = a_0 + \triangle a$, $b = b_0 + \triangle b$, $H = H_0 + \triangle H$, $\lambda = \lambda_0 + \triangle \lambda$

则由方程 (5~7) 和 (17) 式得到类似于 (12~14) 的增量方程 (相应方程中增加含 $\triangle \lambda$ 的项) 和

$$(h \mp |h|) \triangle a + \triangle b = h - (h \mp |h|) a_0 - b_0 \quad (19)$$

由此得代数方程组

$$A_n \triangle a + B_n \triangle b + A_{n,0} \triangle P_0 + \sum_{j=1}^M (A_{n,j} \triangle P_j + B_{n,j} \triangle Q_j) + C_n \triangle \lambda = R_n \quad (20)$$

其中, $n=0, 1, 2, \dots, 2M+3$, 它比 (16) 式多第 $2M+3$ 行和第 $2M+3$ 列. 同上述求极限环一样, 应用增量法, 从 $\lambda \approx 0$ 对应的零阶近似解出发, 一步一步增量下去, 可得到非小参数时的同宿轨线和分叉值.

2 方程 (2) 的极限环 同宿轨线和分叉值

现在应用摄动增量法研究方程 (2). 本例 $f(x, \dot{x}) = \lambda + x$, $g(x) = x + 1.5x^2$, $V(x) = (x^2 + x^3)/2$, 有两个平衡点: $(0, 0)$ 和 $(-2/3, 0)$, 其中 $(-2/3, 0)$ 为鞍点, $h = -2/3$. 方程的零阶近似解为

$$b_0 = (-1 \mp (1 - 3a_0^2)/3), H_0(h) = [1 - 3a_0^2 + a_0 \cos h]^{1/2},$$

$$\lambda = -a_0 \int_0^h H_0(h) \sin^2 h \cos h dh / \int_0^h H_0(h) \sin^2 h dh - (1 - 3a_0^2)/3 = \lambda(a_0) \quad (21)$$

由文献 [8] 知, $0 < a_0 \leq 1/2$, $-1/6 \leq b_0 < 0$, $\lambda(a_0)$ 为 a_0 的单调上升函数, $0 < \lambda \leq 2/21$. 当 $\lambda \in (0, 2/21)$ 时, 有唯一的极限环; 当 $\lambda = 2/21$ 时, $a_0 = 1/2$, $b_0 = -1/6$, $H_0(h) = |\cos(h/2)|$, 出现同宿轨线.

$$x = (1/2) \cos h - 1/6, dx/dt = -(1/2) |\cos(h/2)| \sin h$$

这与由 (8~10) 式和 (18) 式求得的结果一致.

为了求非小参数情形的同宿轨线和分叉值, 应用增量法. 令 $\lambda_0 = 0$, $\triangle \lambda = 0.5$, $M = 20$, 误

差 $Z=10^{-5}$, 经 20 次增量后求得同宿轨线的 μ , a 和 b 值列于表 1, 其中同宿分叉值 μ 随 λ 的增大而减少. 例如 $\lambda \approx 0$ 时, $\mu = 2/21 \approx 0.09524$, 而 $\lambda = 10$ 时, $\mu = 0.015$. 可见零阶近似值只适用于 λ 很小的情形.

表 1 方程 (2) 不同 λ 值同宿轨线的 μ , a 和 b 值

Tab. 1 Values of μ , a and b at the homoclinic orbits for various λ of equation (2)

λ	μ	a	b	λ	μ	a	b
1.0	0.09303	0.5034	-0.1633	6.0	0.03947	0.5799	-0.0868
2.0	0.08657	0.5129	-0.1538	7.0	0.03019	0.5943	-0.0724
3.0	0.07650	0.5273	-0.1394	8.0	0.02338	0.6058	-0.0609
4.0	0.06409	0.5447	-0.1220	9.0	0.01851	0.6148	-0.0519
5.0	0.05114	0.5629	-0.1038	10.0	0.01500	0.6219	-0.0448

再研究极限环. 令 $\mu = 0.01$, 由 (21) 式求得 $a_0 = 0.1623$, $b_0 = -0.0134$, $H_0(h) = 0.9592 + 0.1623 \cos h$, 因此, 当 $\lambda \approx 0$ 时, 极限环的近似表达式为 $x = 0.1623 \cos h - 0.0134$, $dx/dt = -0.1623 H_0(h) \sin h$.

为了求较大参数时的极限环, 可应用增量法. 令 $\lambda_0 = 0, \Delta\lambda = 0.5, M = 20$, 误差 $Z = 10^{-5}$, 经 10 次和 20 次增量后, 其结果列于表 2, 如有必要, 还可求更大参数的极限环. 极限环的相图如图 1 所示. 图中还给出用四阶 Runge-Kutta 方法求得的数值解, 两种方法结果完全吻合. 图 1 中也给出同宿轨线.

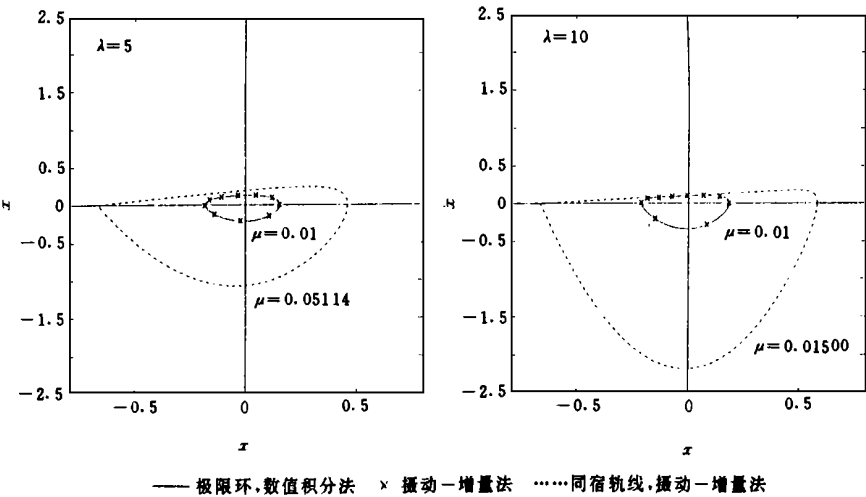


图 1 方程 (2) $\lambda = 5$ 和 $\lambda = 10$ 时极限环和同宿轨线相图

Fig. 1 Limit cycles and homoclinic orbits phase portraits of equation (2) for $\lambda = 5$ and $\lambda = 10$

3 结 论

应用摄动-增量法研究电机工程中的非线性振动问题, 不论系统的参数大小, 极限环、同宿轨线和分叉值都可以很精确计算. 此法是解析法和数值法相结合的一种新方法, 适用于非

线性振动系统的周期解和分叉等问题的研究 .

表 2 方程 (2) 极限环的振幅和偏心及 $H(h)$ 的 Fourier 系数

Tab. 2 Amplitude and bias of the limit cycle and Fourier coefficients of $H(h)$ for equation (2)

$\lambda = 5, _ = 0.01$ $a = 0.167\ 9, b = -0.013\ 7$					$\lambda = 10, _ = 0.01$ $a = 0.197\ 6, b = -0.015\ 0$				
j	P_j		Q_j		P_j		Q_j		
0	9.874	E- 01	0 0		1.031	E+ 00	0 0		
1	8.775	E- 02	2.773	E- 01	1.115	E- 01	6.350	E- 01	
2	- 1.212	E- 02	- 2.909	E- 03	- 6.041	E- 02	- 6.112	E- 03	
3	3.949	E- 04	8.033	E- 04	3.042	E- 03	7.351	E- 03	
4	2.838	E- 07	- 8.235	E- 05	- 8.475	E- 05	- 1.080	E- 03	

参 考 文 献

1 徐兆 . 非线性力学中一种新的渐近方法 . 力学学报 , 1985, 17(3): 266~ 271

2 Xu Z. Nonlinear time transformation method for strong nonlinear oscillation systems. Acta Mechanica Sinica, 1992, 8(3): 279~ 288

3 Xu Z, Cheung Y K. Averaging method using generalized harmonic functions for strongly non-linear oscillation. J of Sound and Vibration, 1994, 174(4): 563~ 576

4 Xu Z, Cheung Y K. A non-linear scales method for strongly non-linear oscillators. Nonlinear Dynamics, 1995, 7(3): 285~ 299

5 Chen S H, Cheung Y K. An elliptic perturbation method for certain strongly non-linear oscillators. J of Sound and Vibration, 1996, 192(2): 453~ 464

6 Chan H S Y, Chung K W, Xu Z. A perturbation-iterative method for determining limit cycles for strongly non-linear oscillators. J of Sound and Vibration, 1995, 183(4): 707~ 717

7 Chan H S Y, Chung K W, Xu Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators. Int J Non-Linear Mechanics, 1996, 31(1): 59~ 72

8 吴福光,蔡承武,徐兆 . 振动理论 . 北京: 高等教育出版社, 1987. 385~ 388

9 徐兆,黄颜彪 . 非线性振子极限环的实用分析法 . 力学与实践, 1988, 10(5): 6~ 10

The Perturbation-Incremental Method for Studying
Limit Cycles and Homoclinic Bifurcation

*Xu Zhao** *Chen Shuhui*

Abstract Investigates a class of strongly nonlinear oscillators in electrical engineering by using the perturbation-incremental method. Limit cycles, homoclinic orbits and bifurcations of the oscillators can be calculated to any desired degree of accuracy.

Keywords limit cycle, homoclinic orbit, bifurcation, perturbation-incremental method

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275