

沿岸上升流数值模拟^{*}

章克本

韦壮志

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275) (广东省水电勘测设计院)

摘 要 以珠江口以东沿岸海区为例, 用有限元法对沿岸上升流作了数值模拟, 方程采用一种简单的两层分层模式. 为消除噪声干扰, 采用非协调单元, 并提出了改善其协调性的方法.

关键词 上升流, 非协调元, 两层模式

分类号 O 368, P 731. 21

海洋特别是沿岸上升流现象由于其在物理海洋学、生态学及气候学上的重要性, 历来受到海洋及其产业界的关注. 沿岸上升流因表层水水平辐散使下层水上升而形成, 因而与风强度及其分布、岸形、底形、海水分层等因素有关. 上升流最显著的特征是流速很小, 约为 1 天上升数米, 除非专门仪器, 一般难以测量, 因此, 上升流的数值模拟, 就显得十分必要, 而其成功的关键, 在于有较高的精度.

1 基本方程及边界条件

这里所取基本方程为 f 平面上的采用布辛涅斯克近似的 2 层浅水方程^[1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{5}) h = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{5}) \vec{v} + f \vec{k} \times \vec{v} = \\ - g \vec{5} (h_1 + h_2 + D) - g W_2 \frac{(d_2 - d_1)}{d} \vec{5} h_1 + \frac{\vec{f}_1 - \vec{f}_2}{d h} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 下标 $l=1, 2$, 分别表示上层及下层, k 为垂向单位矢量, f 为柯氏参数, h_1, h_2 及 D 各量意义见图 1, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ 分别为各层的上表面及下表面的应力, $\vec{v}_l$ 为各层垂直平均的水平速度.

边界条件是^[2, 3]

$$\begin{cases} \vec{v}_n = 0 & \text{岸边界} \\ h'_l = 0 & \text{海边界} \\ \vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \nu^2 d w^2 (\cos U, \sin U) & \text{自由面} \\ \vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{f}_l = C \frac{d_1 + d_2}{2} \frac{|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|}{2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) & \text{界面} \\ \vec{f}_2 = C_b d_2 |\vec{v}_2| \vec{v}_2 & \text{底面} \end{cases}$$

其中, ν^2, C, C_b 为无量纲阻尼系数, d 为空气密度, w 为风速, U 为风速与 x 轴之夹角, $h'_1 = h_1$

^{*} 收稿日期: 1997-01-25 章克本, 男, 59 岁, 副教授

— $H_1, h_2 = h_2 - H_2 + D$ 分别为上下层的厚度改变量, h_1 及 h_2 为层厚.

2 非协调单元的采用

为尽可能逼近岸形, 本文数值计算应用有限元法, 同时为避免产生噪声干扰, 这里采用了非协调单元, 即速度 $\vec{v}$ 在三角形单元的边中点取值, 层厚度改变量 h_i 在三角形单元的角点上取值:

$$\vec{v}(x, y, t) = \sum_{p \in P} \vec{v}_p(t) W_p(x, y) \quad (3)$$

$$h_i(x, y, t) = \sum_{r \in R} h_r(t) h_r(x, y) \quad (4)$$

其中, P 为计算区域 K 内部的边中点集合, R 为计算区域 K 的角点集合, w_p 为边中点插值形函数, h_r 为角点插值形函数^[2].

$$w_i(x_j, y_j) = h(x_j, y_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

形函数 h 的性质是众所周知的, 而形函数 (如图 2) w_i 有

$$\int_{A_i} w_i(x, y) dx dy = A_i / 3, \quad \int_{A_i} w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy = W_j A_i / 3$$

其中, A_i 为形函数 w_i 下的面积.

由于网格点取在单元边中点上, 作为区域的这个边界点, 其法向能准确定义, 从而其无通量边界条件可得到精确满足, 此外, 利用边中点形函数的正交性质, 动量方程变分展开时形成的系数矩阵只有对角线元素非零, 从而其有限元计算不需要所谓集中质量法, 也不需要合成总刚, 而可以一次性显式求解, 这些都是采用非协调单元的优点.

但非协调单元的应用却使物理量在各单元边上不连续, 这是不能令人满意的. 为此, 采取一种改善其协调性的方法, 即先将在边中点取值的物理量用形函数进行插值, 求出在各单元位于角点处的值. 然后对同一角点, 把上述不同单元中求得的值进行平均, 再利用在角点处的这个平均值, 通过形函数进行反插值, 求出在边中点上的值. 计算表明, 这一改进克服了非协调单元带来的困难, 更好地体现了流场的流动特征.

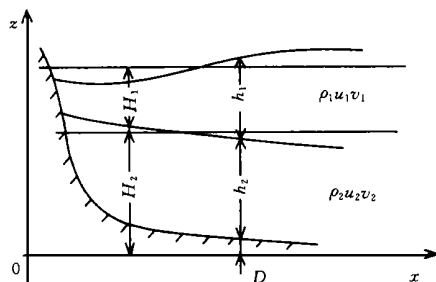


图 1 两层模式

Fig. 1 Two-layer model

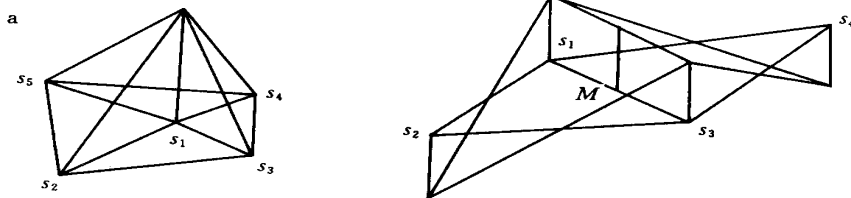


图 2 形函数的形状

Fig. 2 Shape of a linear function

3 数值离散方程

为了建立伽辽金近似方程,需要运用形函数 h_i 及 w_i 之间的关系,即

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

因此,在某单元内,有以下转换关系

$$\begin{aligned} \vec{v}_l &= \sum_{j=1}^3 \vec{v}_{lj} = \sum_{j=1}^3 \vec{v}_{lj} (h_{jq} - h_j) = \sum_{j=1}^3 (\vec{v}_{lq} - \vec{v}_{lr} - \vec{v}_{lj}) h_j \\ h'_l &= \sum_{j=1}^3 h'_{lj} h_j = \sum_{j=1}^3 h'_{lj} \frac{1}{2} (w_{jq} - w_r) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} (h'_{lq} - h'_{lr}) w_j \end{aligned}$$

其中, $q, r = 1, 2, 3$, 且 q, r, j 互不相同.

将 (3), (4) 式代入 (1), (2) 式中有

$$\begin{aligned} &\sum_j \frac{\partial h_{lj}}{\partial t} h_{jq} - \sum_j h_{lj} h_j \operatorname{div} \left(\sum_j \vec{v}_{lj} w_j \right) + \left[\left(\sum_j \vec{v}_{lj} w_j \right) \cdot \vec{s} \right] \left(\sum_j h_{lj} h_j \right) = 0 \\ &\sum_j \frac{\partial w_{lj}}{\partial t} w_j + \left[\left(\sum_j \vec{v}_{lj} w_j \right) \cdot \vec{s} \right] \left(\sum_j \vec{v}_{lj} w_j \right) + f \nabla^2 \left(\sum_j \vec{v}_{lj} w_j \right) + g \sum_j h_{lj} h_{jq} - \\ &\sum_j h_{2j} h_j + \sum_j D_j h_j - g W_2 \frac{d_2 - d_1}{d_2} \sum_j h_{lj} h_j - \sum_j \left(f_{slj} / d h_{lj} - f_{blj} / d h_{lj} \right) w_j = 0 \end{aligned}$$

上式分别乘以 h_i 及 w_i , 然后在单元 e 内积分, 得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h'_{li}}{\partial t} \frac{Ae}{6} + \left(\frac{\partial h'_{lq}}{\partial t} + \frac{\partial h'_{lr}}{\partial t} \right) \frac{Ae}{12} \left[H_i + \frac{1}{2} h'_{li} + \frac{1}{4} (h'_{lq} - h'_{lr}) - \right. \\ &W_2 \left(-\frac{1}{2} D_i + \frac{1}{4} D_q + \frac{1}{4} D_r \right) \cdot \left(\frac{Ae}{3} \sum_k u_k \frac{\partial w_k}{\partial x} + \sum_k v_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) - \\ &(u_{lq} - u_{lr}) \frac{Ae}{6} \sum_k h'_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial x} - W_2 \sum_k D_k \frac{\partial h_k}{\partial x} \left. - (v_{lq} - v_{lr}) \frac{Ae}{6} \sum_k h'_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial y} - W_2 \sum_k D_k \frac{\partial h_k}{\partial y} \right] \\ &\frac{\partial w'_{li}}{\partial t} \frac{Ae}{3} = -u_{li} \left(\sum_k \vec{v}_{lk} \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) \frac{Ae}{3} - v_{li} \left(\sum_k \vec{v}_{lk} \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) \frac{Ae}{3} - f(-v_{li}, u_{li}) \frac{Ae}{3} - \\ &g \sum_k (h'_{lk} + h'_{2k}) \frac{\partial h_k}{\partial x} + \sum_k (h'_{lk} - h'_{2k}) \frac{\partial h_k}{\partial y} \left. \frac{Ae}{3} + \right. \\ &g W_2 \frac{d_2 - d_1}{d_2} \left(\sum_k h'_{1k} \frac{\partial h_k}{\partial x} + \sum_k h'_{1k} \frac{\partial h_k}{\partial y} \right) \frac{Ae}{3} + \left(f_{slj} / d h_{li} - f_{blj} / d h_{li} \right) \frac{Ae}{3} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, Ae 为单元 e 的面积.

方程 (6) 经单元合成后, 可显式地进行时间积分. 这一便利正是采用非协调元的结果. (5) 式的积分则比较复杂且非常关键, 这里采用逐项超松弛迭代法求解, 将 (5) 式单元合成后写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ & & \cdots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_{l1} \\ h'_{l2} \\ \cdots \\ h'_{lN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{l1} \\ f_{l2} \\ \cdots \\ f_{lN} \end{pmatrix} \quad l = 1, 2$$

$$\text{或} \quad h'_{lr} = \frac{1}{a_{rr}} \left[f_{lr} - \sum_{k=1}^{r-1} a_{rk} h'_{lk} - \sum_{k=r+1}^N a_{rk} h'_{lk} \right] \quad l = 1, 2, \dots, N$$

现在构造超松弛迭代

$$h_{lr}'^{(p+1)} = (1-k)h_{lr}'^{(p)} - \frac{k}{a_{rr}} \sum_{k=1}^{r-1} a_{rk} h_{lk}'^{(p+1)} + \sum_{k=r+1}^N a_{rk} h_{lk}'^{(p)} - f_{lr}^{(m,p)} \quad l=1,2$$

$$r=1, \dots, N$$

其中, p 表示超松弛迭代的步数, m 是计算的时间步数, k 为超松弛因子. 试验表明, 该方法得到了较好的效果.

4 计算结果及分析

本数值模拟以珠江口以东的大鹏湾、大亚湾、红海湾一带的外海, 南北宽约 200 km, 东西长约 300 km 的区域作试验, 区域采用三角形网格, 近岸密, 外海稀, 整个区域共取 1 076 个三角形单元, 612 个角点, 1 687 个边中点, 底形取为平底, 水深 50 m, 上层水 15 m, 初始流场静止, 风突然定常作用于海面上, 应力不均匀分布, 外海最大风应力为 0.2 N/m^2 , 岸边减至 0.1 N/m^2 以下. 空气密度 ρ_a 取 1.1838 kg/m^3 , 海水密度 ρ_s 取为 1.021 kg/m^3 , ρ_b 取为 1.025 kg/m^3 . 计算得如下结果.

(1) 风作用后, 上层水流场响应很快, 一天以后就变化趋缓, 形成整片大致东南向的离岸流动, 下层水流场响应较慢, 但 36 h 后流场仍有变化. 在大鹏湾、大亚湾一带外海, 有明显但不大的向岸及逆风向的流动, 这是由于补充上层水和海岸形状复杂等因素造成的.

(2) 上表面水位均下降, 下降值近岸大, 外海小, 最大下降发生在大亚湾一带, 这是由于上层水大量离岸的缘故.

(3) 上下层间的界面的位移, 直接反映了上升流的变化及分布, 风作用后, 界面即逐渐上升, 风作用 6 h 时, 大鹏湾、大亚湾一带的界面已上升超过 1 m, 图 3 为风作用 36 h 时界面上升高度分布, 最大上升值在大亚湾沿岸, 超过 5 m. 若将图 3 中 A, A' 作一垂直断面, 看断面上的界面高度随时间的演变, 则得图 4, 图 4 表明, 此断面上界面随时间及空间的变化. 在大亚湾附近, 界面日上升 5 m 左右.

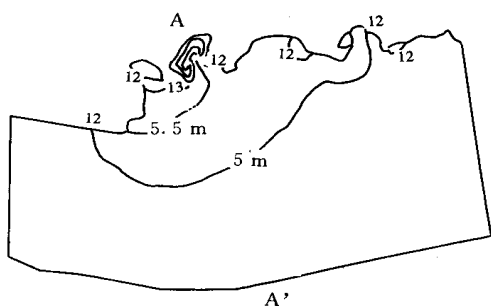


图 3 界面上升高度等值线 $t = 36 \text{ h}$

Fig. 3 Interface elevation for $t = 36 \text{ h}$

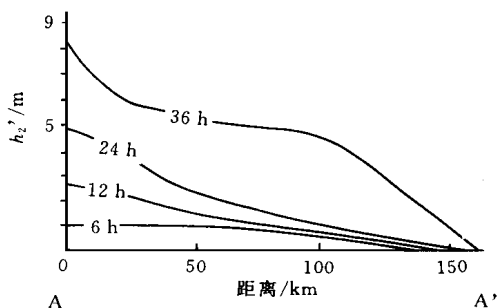


图 4 界面上升高度随时间和空间的变化 ($A-A'$ 断面)

Fig. 4 Interface height anomaly for each time

本文所作的计算结果非常接近于由 [5] 提供的粤东沿岸上升流大概位置的实测资料分析结果 (对比图 5^[5]).

5 结 论

从以上看出, 本数值计算较好地模拟了沿岸上升流的分布及演变特征. 其中非协调单元的采用, 协调性的改善及计算方法的选取, 起到了关键的作用. 值得一提的是, 在本模拟中, 伴随上升流发生的沿岸射流、二次上升流^[4]等现象, 也都隐若可见, 这将留待继续研究.

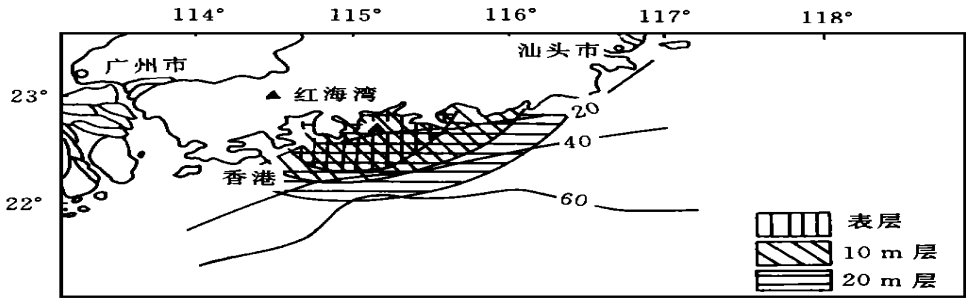


图 5 1979 年 7 月粤东沿岸上升流大概位置

Fig. 5 General position of the coastal upwelling to east Guangdong in July, 1979

参 考 文 献

- 1 O'Brien J J, Hurlburt H E. A numerical model of coastal upwelling. J Phys Oceanogr, 1972, 2 (1): 14~ 26
- 2 Hua B L, Thomasset F. A noise-free finite element scheme for the two-layer shallow water equations. Tellus, 1984, 36A (2): 157~ 165
- 3 Wang J D, Connor J J. Mathematical Modeling of Near Coastal. circulation, Massachusetts MIT, 1975. 88~ 224
- 4 Gill A E, Clarke A J. Wind-induced upwelling, coastal currents and sea level changes. Deep-sea Res, 1974, 21 325~ 345
- 5 曾流明. 粤东沿岸上升流迹象的初步分析. 热带海洋, 1986, 5 (1): 68~ 72

Numerical Method of Coastal Upwelling

Zhang Keben* Wei Zhuangzhi

Abstract As an example of the investigation of the coastal upwelling, the coastal upwelling on the Guangdong continental shelf is simulated numerically by using two-layer finite element model. The nonconforming elements are adopted to remove the disturbance of noise and some method is introduced here for improving the conformability between the elements. The results obtained are approximate to the information from on-the-spot survey.

Keywords upwelling, non-conforming element, two-layer model

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275