

Zienkiewicz 元广义差分格式及应用*

陈 仲 英

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要 以 Poisson 方程为模型, 导出基于 Zienkiewicz 元的广义差分格式, 给出误差估计和数值试验. 作为应用, 给出自由水面势流的双点迭代广义差分算法和二维浮体振荡的相似单元广义差分算法.

关键词 Poisson 方程, Zienkiewicz 元, 广义差分法, 相似单元法

分类号 O 241. 82

专著[1]中给出求解偏微分方程的几种广义差分格式, 其中高次元格式包括 Lagrange 型的二次元差分格式和 Hermite 型的三次元差分格式. 本文讨论基于 Zienkiewicz 元的广义差分格式, 同时给出自由水面势流的双点迭代广义差分算法和二维浮体振荡的相似单元广义差分算法. 从中可见, 广义差分法的变分形式及其吸取有限元的单元分析法使得有限元法的许多成果和方法可以移植到广义差分格式.

1 Zienkiewicz 元广义差分格式

考虑 Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 为平面多边形区域, $\partial\Omega$ 为其边界, $f \in L^2(\Omega)$.

作 $\bar{\Omega}$ 的正则三角剖分 T_h 和相应的对偶剖分 T_h^* [1]. 为确定起见, 设 T_h^* 为重心对偶剖分. T_h 由有限个三角单元 K_Q 组成, Q 表示三角形的重心, h 表示所有三角形的最大边长. 记号 $\bar{\Omega}_h$ 表示所有三角形顶点组成的集合, Ω_h^* 表示所有三角形重心组成的集合, S_K 表示 K 的面积, $\bar{\Omega}_h = \bar{\Omega}_h \setminus \partial\Omega$.

取试探函数空间 U_h 为相应于 T_h 的 Zienkiewicz 元空间[2]. 其函数 $u_h \in U_h$ 为受限制分片三次多项式, 由节点上的自由度 $\{u_h(P_0), \frac{\partial u_h(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial u_h(P_0)}{\partial y}; P_0 \in \bar{\Omega}_h\}$ 所唯一确定, 并满足边值条件. 设 $P_0 = (x_0, y_0) \in \bar{\Omega}_h, P = (x, y), K_{P_0}^* \in T_h^*$ 为含 P_0 的对偶单元, 令

* 广东省自然科学基金资助项目

收稿日期: 1995 - 03 - 17 陈仲英, 男, 50 岁, 副教授

$$\psi_{P_0}^{(0)}(P) = \begin{cases} 1, & \text{当 } P \in K_{P_0}^* \\ 0, & \text{当 } P \in \overline{K_{P_0}^*} \end{cases}; \quad \psi_{P_0}^{(1)}(P) = \begin{cases} x-x_0, & \text{当 } P \in K_{P_0}^* \\ 0, & \text{当 } P \in \overline{K_{P_0}^*} \end{cases}; \quad \psi_{P_0}^{(2)}(P) = \begin{cases} y-y_0, & \text{当 } P \in K_{P_0}^* \\ 0, & \text{当 } P \in \overline{K_{P_0}^*} \end{cases}$$

取检验函数空间

$$V_k = \text{span}\{\psi_{P_0}^{(k)}; P_0 \in \hat{\Omega}_k, k=0; P_0 \in \bar{\Omega}_k, k=1,2\}$$

求解边值问题(1)的广义差分格式为:求 $u_h \in U_h$, 使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{2}$$

或 $a(u_h, \psi_{P_0}^{(k)}) = (f, \psi_{P_0}^{(k)}), \forall P_0 \in \hat{\Omega}_k, k=0; P_0 \in \bar{\Omega}_k, k=1,2$

这里 $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) dx dy$ 按广义函数意义理解, 即有

$$a(u_h, \psi_{P_0}^{(0)}) = \int_{K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial y} dx - \frac{\partial u_h}{\partial x} dy \tag{3}$$

$$a(u_h, \psi_{P_0}^{(1)}) = \int_{K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial x} dx dy + \int_{\partial K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial y} \psi_{P_0}^{(1)} dx - \frac{\partial u_h}{\partial x} \psi_{P_0}^{(1)} dy \tag{4}$$

$$a(u_h, \psi_{P_0}^{(2)}) = \int_{K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial y} dx dy + \int_{\partial K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial x} \psi_{P_0}^{(2)} dx - \frac{\partial u_h}{\partial y} \psi_{P_0}^{(2)} dy \tag{5}$$

定义 U_h 到 V_h 的插值算子 Π_h^*

$$\Pi_h^* \bar{u}_h = \sum_{P_0 \in \hat{\Omega}_k} \left[\bar{u}_h(P_0) \psi_{P_0}^{(0)} + \frac{\partial \bar{u}_h(P_0)}{\partial x} \psi_{P_0}^{(1)} + \frac{\partial \bar{u}_h(P_0)}{\partial y} \psi_{P_0}^{(2)} \right], \quad \forall \bar{u}_h \in U_h$$

计算格式(2)等价于

$$a(u_h, \Pi_h^* \bar{u}_h) = (f, \Pi_h^* \bar{u}_h), \quad \forall \bar{u}_h \in U_h \tag{6}$$

为了计算单元“刚度”矩阵和进行单元分析, 把(6)式左端改写为

$$a(u_h, \Pi_h^* \bar{u}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K(u_h, \Pi_h^* \bar{u}_h) \tag{7}$$

其中 $K = \triangle P_i P_j P_k$ (参见图 1a)

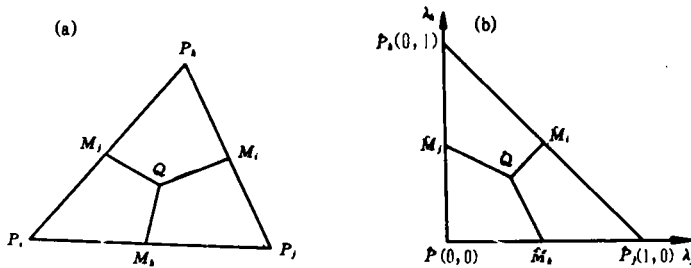


图 1 三角单元 K (a)和参考元 \hat{K} (b)

Fig. 1 (a)Triangular element K , (b) reference element \hat{K}

$$I_K(u_h, \Pi_h^* \bar{u}_h) = \sum_{i=1,j,k} \left[\bar{u}_h(P_i) I_K(u_h, \psi_{P_i}^{(0)}) + \frac{\partial \bar{u}_h(P_i)}{\partial x} I_K(u_h, \psi_{P_i}^{(1)}) + \frac{\partial \bar{u}_h(P_i)}{\partial y} I_K(u_h, \psi_{P_i}^{(2)}) \right] \tag{8}$$

而各 $I_K(u_h, \psi_P)$ 分别等于 $a(u_h, \psi_P)$ 表达式(见式(3)~(5))中 $K_{P_0}^*$ 换成 $K_{P_0}^* \cap K, \partial K_{P_0}^*$ 换成

$\partial K_i^* \cap K$ 所得的式子.

引进面积坐标

$$\lambda_i = \frac{1}{2S_K} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad \lambda_j = \frac{1}{2S_K} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad \lambda_k = \frac{1}{2S_K} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix} \quad (9)$$

在 K 上, $u_h \in U_h$ 可用面积坐标表为

$$u_h = \sum_{l=(i,j,k)} (-2\lambda_l^3 + 3\lambda_l^2 + 2\lambda_l\lambda_j\lambda_k) u_h(P_l) + \sum_{l=(i,j,k)} \left[(\lambda_l^3 - \lambda_l^2 - \lambda_l\lambda_j\lambda_k) \frac{\partial u_h(P_l)}{\partial \lambda_l} + \sum_{m=j,k} (\lambda_m^2\lambda_l + \frac{1}{2}\lambda_l\lambda_j\lambda_k) \frac{\partial u_h(P_m)}{\partial \lambda_l} \right] \quad (10)$$

在变换 $(x, y) \rightarrow (\lambda_j, \lambda_k)$ 之下, 三角单元 K 变成参考元 \hat{K} (图 1b), 点 P_i, M_l, Q 分别变成 $\hat{P}_i, \hat{M}_l, \hat{Q}$ ($l=i, j, k$). 利用关系式

$$\frac{\partial u_h}{\partial x} = \frac{1}{2S_K} \left[(y_i - y_j) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} + (y_i - y_j) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} \right], \quad \frac{\partial u_h}{\partial y} = \frac{1}{2S_K} \left[(x_i - x_k) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} + (x_j - x_i) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} \right],$$

$$dx = (x_j - x_i)d\lambda_j + (x_k - x_i)d\lambda_k, \quad dy = (y_j - y_i)d\lambda_j + (y_k - y_i)d\lambda_k$$

并记 $a = |P_i P_k|, b = |P_i P_j|, c = |P_j P_k|$, 简单计算可得

$$\int_{L_i} \left(\frac{\partial u_h}{\partial y} dx - \frac{\partial u_h}{\partial x} dy \right) = \frac{1}{2S_K} \int_{L_i} \left[-a^2 \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} d\lambda_k + b^2 \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} d\lambda_j + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) \left(-\frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} d\lambda_j + \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} d\lambda_k \right) \right] \quad (11)$$

$$\int_{K_i} \frac{\partial u_h}{\partial x} dx dy = \int_{\hat{K}_i} \left[(y_i - y_j) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} + (y_i - y_j) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} \right] d\lambda_j d\lambda_k \quad (12)$$

$$\int_{K_i} \frac{\partial u_h}{\partial y} dx dy = \int_{\hat{K}_i} \left[(x_i - x_k) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_j} + (x_j - x_i) \frac{\partial u_h}{\partial \lambda_k} \right] d\lambda_j d\lambda_k \quad (13)$$

其中 \hat{L}_i 和 \hat{K}_i 分别是 $L_i = \partial K_i^* \cap K$ 和 $K_i = K_i^* \cap K$ 经变换得到的线路和区域. 利用(10)~(13)计算得到

$$I_K(u_h, \Pi_h^* \bar{u}_h) = [\bar{u}_h]_K^T A [u_h]_K \quad (14)$$

记号 $[u_h]_K$ 表示 $[u_h(P_i), u_h(P_j), u_h(P_k), \frac{\partial u_h(P_i)}{\partial \lambda_j}, \frac{\partial u_h(P_j)}{\partial \lambda_j}, \frac{\partial u_h(P_k)}{\partial \lambda_j}, \frac{\partial u_h(P_i)}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial u_h(P_j)}{\partial \lambda_k}, \frac{\partial u_h(P_k)}{\partial \lambda_k}]^T$, A

为如下 9 阶矩阵

$$A = \frac{1}{20736S_K} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 是 3×3 矩阵, 其元素都是 a^2, b^2, c^2 的一次式, 例如

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 384a^2 + 384b^2 + 6720c^2 & -3360a^2 + 2976b^2 - 3360c^2 & 2976a^2 - 3360b^2 - 3360c^2 \\ -3360a^2 + 2976b^2 - 3360c^2 & 6720a^2 + 384b^2 + 384c^2 & -3360a^2 - 3360b^2 + 2976c^2 \\ 2976a^2 - 3360b^2 - 3360c^2 & -3360a^2 - 3360b^2 + 2976c^2 & 384a^2 + 6720b^2 + 385c^2 \end{bmatrix}$$

其他从略. 注意关系式

$$[u_h]_K = Q [u_h(P_i), u_h(P_j), u_h(P_k), \frac{\partial u_h(P_i)}{\partial x}, \frac{\partial u_h(P_j)}{\partial x}, \frac{\partial u_h(P_k)}{\partial x}, \frac{\partial u_h(P_i)}{\partial y}, \frac{\partial u_h(P_j)}{\partial y}, \frac{\partial u_h(P_k)}{\partial y}]^T$$

其中(设 I 为 3 阶单位矩阵)

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & (x_j - x_i)I & (y_j - y_i)I \\ 0 & (x_k - x_i)I & (y_k - y_i)I \end{bmatrix}$$

可知单元“刚度”矩阵为

$$E = Q^T A Q \tag{15}$$

利用单元矩阵叠加则得格式(2)的总体系数矩阵.

2 误差估计和数值试验

类似文[1],通过施行合同变换并利用 Gerschgorin 定理,即可证明 $I_K(u_h, \Pi_h^* u_h)$ 为 $[u_h(P_j) - u_h(P_i), u_h(P_k) - u_h(P_i), \partial u_h(P_i)/\partial \lambda_j, \partial u_h(P_j)/\partial \lambda_j, \partial u_h(P_k)/\partial \lambda_j, \partial u_h(P_i)/\partial \lambda_k, \partial u_h(P_j)/\partial \lambda_k, \partial u_h(P_k)/\partial \lambda_k]$ 的正定二次型,从而得到如下的一致椭圆性.

定理 1 设三角剖分 T_h 中每一单元的最大角不超过 $\pi/2$,且最大角两夹边边长之比 $\tau \in [\sqrt{2/3}, \sqrt{3/2}]$,则存在不依赖于 U_h 的常数 $\alpha > 0$,使得

$$a(u_h, \Pi_h^* u_h) \geq \alpha \|u_h\|_1^2, \quad \forall u_h \in U_h \tag{16}$$

由定理 1 即知格式(2)的解存在且唯一,且易导出下面的误差估计.

定理 2 设定理 1 的条件成立, u 是边值问题(1)的广义解, u_h 是广义差分格式(2)的解.若 $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,则有

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^2 |u|_3 \tag{17}$$

上述两定理的证明只须逐一重复[1]的论证并稍作修改,故从略.

作为算例,下面用通常的有限差分格式(FDM)和上述所述的广义差分格式(GDM)求解下列边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 2 \sin x \sin y, & (x, y) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

用直线网 $x = x_i = ih, y = y_j = jh, x + y = kh (h = \pi/N; i, j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, 2N - 1)$ 作 $\bar{\Omega}$ 的直角三角剖分 T_h ,对偶剖分 T_h^* 取为外心对偶剖分使计算更为简单.所得计算结果与精确解(ES) $u = \sin x \sin y$ 的值如表 1(取 $N = 8$).从中可见广义差分解的函数值和偏导数都有良好的逼近精度.

3 自由水面势流的双点迭代广义差分算法

计算自由水面的势流可归结为求解 Laplace 方程的定解问题,适合应用广义差分算法.由于求解区域的不确定性,造成问题的非线性特征.我们可以如同有限元法那样采用双点迭代法.以闸孔出流为例,考虑问题(参见图 2):

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & \text{在流场 } \Omega \text{ 内,} \\ \partial \varphi / \partial n = 0, & \text{在上、下游边界 DE, AF 上,} \\ \varphi = 0, & \text{在固壁 EF 上,} \\ \varphi = Q, & \text{在固壁 BC 和自由水面 AB, CD 上,} \\ \partial \varphi / \partial n = \sqrt{2g(E_0 - h)}, & \text{在自由水面 AB, CD 上,} \end{cases} \tag{19}$$

其中 φ 为流函数, Q 为流量, E_0 为能头.

数值求解时,先取一初始流量 Q_0 和初始自由水面 $y = h_0(x)$.假设已得到 Q_n 和 $y = h_n(x) (n = 0, 1, \dots)$,用广义差分格式解如下边值问题:

表 1 数值结果

Tab. 1 Numerical results

(x, y)	FDM		GDM		ES		
	u_s	u_s	$\partial u_s / \partial x$	$\partial u_s / \partial y$	u	$\partial u / \partial x$	$\partial u / \partial y$
(x_1, y_1)	0.148 343	0.146 549	0.366 400	0.366 399	0.146 445	0.353 553	0.353 553
(x_3, y_1)	0.274 102	0.271 492	0.291 480	0.652 708	0.270 598	0.270 598	0.653 281
(x_3, y_1)	0.358 132	0.355 120	0.159 849	0.856 630	0.353 553	0.146 447	0.853 553
(x_4, y_1)	0.387 639	0.384 656	0.000 581	0.933 875	0.382 683	0.000 000	0.923 879
(x_2, y_2)	0.506 475	0.501 556	0.504 478	0.504 476	0.500 000	0.500 000	0.500 000
(x_3, y_2)	0.661 742	0.655 371	0.272 361	0.657 295	0.653 281	0.270 598	0.653 282
(x_4, y_2)	0.716 264	0.709 560	-0.002 708	0.713 373	0.707 106	0.000 000	0.707 107
(x_3, y_3)	0.864 607	0.855 935	0.354 975	0.354 973	0.853 553	0.353 553	0.353 553
(x_4, y_3)	0.935 844	0.926 459	-0.001 750	0.385 740	0.923 878	0.000 000	0.382 685
(x_4, y_4)	1.012 950	1.002 612	-0.000 008	-0.000 010	1.000 000	0.000 000	0.000 000
最大绝对误差	0.011 965	0.002 612	0.020 882	0.012 846			
平均误差	0.007 500	0.001 821	0.005 984	0.004 581			

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{DEUAF} = 0, \varphi \Big|_{EF} = 0, \varphi \Big|_{BCUCD} = Q_s, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{AB} = \sqrt{2g(E_0 - h_s)} \end{cases} \quad (2)$$

求得近似解 $\varphi_s, \partial \varphi_s / \partial x, \partial \varphi_s / \partial y$. 然后在 AB 上令

$$\Delta \psi_s = Q_s - \varphi_s$$

在 CD 上令

$$V_s^2 = \left[\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=h_s(x)},$$

$$h_{s+1} = E_0 - \frac{V_s^2}{2g}, \quad \Delta h_s = h_{s+1} - h_s$$

检验 $|\Delta \psi_s|, |\Delta h_s|$ 是否达到精度要求. 若达到要求则终止迭代, 否则修正 Q_s 和 $z = h_s$, 继续迭代, 直到达到要求.

4 二维浮体振荡的相似单元广义差分法

二维浮体振荡, 流体质点作简谐振动, 流体压力为 $P(x, y, t) = P(x, y) \sin \omega t$, $P(x, y)$ 满足如下边值问题:

$$\begin{cases} \Delta P = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{S_0} = g, \\ P \Big|_{S_f \cup S_\infty} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中 S_0 为浮体表面, S_f 为自由水面, S_∞ 为无穷远边界.

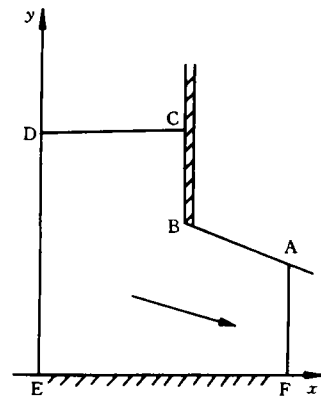


图 2 闸孔出流

Fig. 2 Sluice gate flow

再依次不相重迭地两两归并,如此归并 N 次,每次按如下关系式推导

$$\begin{aligned}
 A_m^{(k+1)} &= A_{2m-1}^{(k)} - B_{2m-1}^{(k)}(D_{2m-1}^{(k)} + A_{2m}^{(k)})^{-1}C_{2m-1}^{(k)} \\
 B_m^{(k+1)} &= B_{2m-1}^{(k)}(D_{2m-1}^{(k)} + A_{2m}^{(k)})^{-1}B_{2m}^{(k)} \\
 C_m^{(k+1)} &= C_{2m}^{(k)}(D_{2m-1}^{(k)} + A_{2m}^{(k)})^{-1}C_{2m-1}^{(k)} \\
 D_m^{(k+1)} &= D_{2m}^{(k)} - C_{2m}^{(k)}(D_{2m-1}^{(k)} + A_{2m}^{(k)})^{-1}B_{2m}^{(k)} \\
 m &= 1, 2, \dots, 2^{N-k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{25}$$

最后得到

$$\begin{bmatrix} A_1^{(N)} & -B_1^{(N)} \\ -C_1^{(N)} & D_1^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

消去 U_M 就得到

$$[A_1^{(N)} - B_1^{(N)}(D_1^{(N)})^{-1}C_1^{(N)}]U_0 = G \tag{26}$$

方程组(26)仅含浮体表面上的自由度,即整个问题化为只需在浮体表面上求解。

参 考 文 献

- 1 李荣华,陈仲英.微分方程广义差分法.长春:吉林大学出版社,1994.98~151
- 2 西阿莱 P G.有限元素法的数值分析.上海:上海科技出版社,1978
- 3 张涤明,章克本,侯书苓.流体力学中的相似单元法.中国科学 A 辑,1986,(7):718~725

The Generalized Difference Scheme Based on Zienkiewicz Element and Its Applications

Chen Zhongying *

Abstract The generalized difference scheme base on Zienkiewicz element is discussed for a model problem Poisson equations. The error estimate and numerical example are given. As applications, a generalized difference iterative algorithm is suggest for the problem of potential flow of water with free surface, and a generalized difference algorithm on similar elements is suggest for the vibration problem of two-dimensional floating body.

Keywords Poisson equation, Zienkiewicz element, generalized difference scheme, similitude method

* Department of Scientific Computation and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275