

拓扑有界集的 Pareto-Optimal 点的存在结论

林金桢

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 证明了带有 π 性质锥的序局部凸线性拓扑空间中的每一个有界弱闭集和带有 π 性质锥或角性质锥的序局部凸完备拓扑线性空间中的每一有界闭集存在 Pareto-optimal 点. 还给出了揭示 π 性质锥与角锥各自的对偶特征的完整结果.

关键词 Pareto-optimal 点, π 性质锥, 角锥

分类号 O 177.3

定义 1 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 是序局部凸线性拓扑空间, E_+ 是凸锥^[1,2].

(1) 共轭空间 E' 上的点集 $E'_+ = -E_+^0 = \{f \in E' \mid f(x) \geq 0, \forall x \in E_+\}$ 称为 E_+ 的共轭锥.

(2) 设集 $A \subset E$, 若 $x_0 \in A \cap (x_0 + E_+) \cap A = \{x_0\}$, 则称 x_0 是集 A 的 Pareto-optimal 点或序极大元.

(3) 若存在 $\theta \neq 0 \in E'_+$ 及 $\delta > 0$, 使点集 $E_\delta(\delta, f) = \{x \in E \mid f(x) \leq \delta\}$ 在 E 中相对弱紧, 则说锥 E_+ 具有性质 c , 也称 E_+ 是 c 性质锥.

定义 2 设 (X, X_+) 是序赋范线性空间, 若存在 $\theta \neq 0 \in X'_+$, $0 \leq \delta \leq 1$, 使 $X_\delta \subset \{x \in X \mid f(x) \geq \delta(\|f\| \cdot \|x\|)\}$, 则称 X_+ 是角锥^[3].

已有文献就 Banach 空间中的 c 锥与角锥的性质作了研究^[2-4], 但有关这两个锥的对偶特征方面的研究结果甚少, 因而难以确切地反映它们的实质. 本文将在序拓扑线性空间中给出这两个锥各自的对偶特性的充要条件, 并在此基础上引出文章的主要结果.

定理 1 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 是序局部凸拓扑线性空间, 那么 E'_+ 具有 $U(E', E)$ 拓扑内点的充要条件是存在 $f \in E'_+$, 及 $W > 0$ 使得点集

$$E_+(W, f) = \{x \in E_+ \mid f(x) \leq W\}$$

是 $\mathcal{P}$ 有界集.

证明 设 $f \in U(E', E) - \text{int} E'_+$, 那么存在零点的圆、凸 $U(E', E)$ 邻域 U , 使 $f + U \subset E'_+$, 因 U 是 $\mathcal{P}$ 有界, 故为了证明 $E_+(W, f)$ $\mathcal{P}$ 有界, 只要证 $E_+(W, f) \subset WU^\circ$.

设 $x \in E_+(W, f)$ 及 $g \in U$. 因 $-g \in U$, 于是 $f - g \in E'_+$, 故

$$0 \leq \langle f - g, x \rangle = \langle f, x \rangle - \langle g, x \rangle \leq W - \langle g, x \rangle$$

因有 $\langle g, x \rangle \leq W$, 由此可得 $x \in WU^\circ$, 因此 $E_+(W, f) \subset WU^\circ$.

现设 $E_+(W, f)$ 有界, 往证 $f \in U(E', E) - \text{int} E'_+$.

首先注意到 $\forall \theta \neq u \in E_+$, 必有 $f(u) > 0$. 因此, $E_+(W) \triangleq \{x \in E_+ \mid f(x) = W\} \neq \emptyset$, 且 $E_+(W)$ 有界.

现假若 $f \notin U(E', E) - \text{int} E'_+$, 则空间 $(E', U(E', E))$ 上的任意一个绝对凸零点邻域 U , $(f_+ U) \setminus E'_+ \neq \emptyset$, 于是存在定向量列 $\{f_T\}_{T \in d}$ 使 $f_T \xrightarrow{U(E', E)} \theta$, $(f_+ f_T) \notin E'_+$. 这样对每个 $T \in d$, 存在 $x_T \in E_+$, $x_T \neq \theta$, 使 $\langle f_+ f_T, x_T \rangle < 0$.

注意到 $f(x_T) \neq 0$, 可令 $y_T = W_{x_T} / f(x_T)$, 则 $y_T \in E_+(W)$. 于是 $\langle f_+ f_T, y_T \rangle = W f_T(y_T)$, 同时有 $\langle f_+ f_T, y_T \rangle = \frac{W}{f(x_T)} \langle f_+ f_T, x_T \rangle < 0$, 使得 $f_T(y_T) < 0$, 即 $\forall T \in d, \exists y_T \in E_+(W)$, s. t. $f_T(y_T) < -W$, 这与 $f_T \xrightarrow{U(E', E)} \theta$ 是在 E 中的有界集上一致收敛相矛盾.

定理 2 设 (X, X_+) 是序赋范线性空间, 那么 X_+ 是角锥的充要条件是 $\text{int} X'_+ \neq \emptyset$.

证明 若 X_+ 是角锥, 则存在 $\theta \neq f \in X'_+$ 及 $W > 0$, 使 $X_+ \subset \{x \in X \mid f(x) \geq W \|f\| \cdot \|x\|\}$.

设 $\theta \neq x \in \{x \in X_+ \mid f(x) \leq 1\}$, 因 E_+ 是角锥, 故 x 满足

$$\|x\| \leq f(x) / (W \|f\|) \leq 1 / (W \|f\|).$$

所以 $\{x \in E_+ \mid f(x) \leq 1\}$ 是 X 上有界集, 由定理 1 知 $f \in \text{int} X'_+$.

反之, 设 $f \in \text{int} X'_+$ (不妨设 $\|f\| = 1$), 那么由定理 1 知, 存在 $\lambda > 0$, 使得任意 $x \in X_+$ $f(x) = \{x \in X \mid f(x) \leq 1\}$, 都有 $\|x\| \leq \lambda$.

现设 $x \in E_+$, $x \neq \theta$, 因 $x / f(x) \in X_+(f, 1)$, 故 $\|x / f(x)\| \leq \lambda$, 即 $f(x) \geq \|x\| / \lambda = W \|f\| \cdot \|x\|$, 其中 $W = 1/\lambda$. 所以 $x \in \{x \in X \mid f(x) \geq W \|f\| \cdot \|x\|\}$, X_+ 为角锥.

在定理 1 2 的基础上可引入下面定义:

定义 3 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 为序局部凸线性拓扑空间, 若存在 $\theta \neq f \in E'_+$ 及 $W > 0$, 使得点集 $E_+(W, f) = \{x \in E_+ \mid f(x) \leq W\}$ 为有界集, 则称 E_+ 为角锥.

这样定理 1 的结论便可叙述为: E_+ 为角锥的充要条件是 $U(E', E) - \text{int} E'_+ \neq \emptyset$. 下文的定理 3 刻画了 π 性质锥的对偶特征.

定理 3 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 是序局部凸线性拓扑空间, 那么 E_+ 是 c 性质锥的充要条件是 $f(E', E) - \text{int} E'_+ \neq \emptyset$.

证明 设 E_+ 具有 c 性质, 则存在 $f \in E'_+$, 对 $\forall W > 0$, 凸集 $H = \{x \in E_+ \mid f(x) \leq W\}$ 在 E 上相对弱紧. 记 $K^\circ = \text{Co}\{H \cup (-H)\}$, 那么 K° 是空间 $(E', f(E', E))$ 上的绝对凸零点邻域. 令 $U = W K^\circ / 2$, 往证 $f_+ U \subset E'_+$.

设 $g \in U$, 对任意 $\theta \neq u \in E_+$, 由于 $y = W u / f(u) \in K$, 于是 $g(y) \leq W/2$, 又因 $-g \in U$, 故又有 $g(y) \geq -W/2$, 故

$$(f_+ g, y) = f(y) + g(y) = W g(y) \geq W - |g(y)| \geq W/2 > 0,$$

从而 $(f_+ g, u) = \langle f_+ g, f(u) y / W \rangle = \frac{f(u) \langle f_+ g, y \rangle}{W} > 0$.

即 $f_+ U \subset E'_+$, 因此 $f \in f(E', E) - \text{int} E'_+$.

反之, 若 $f \in f(E', E) - \text{int} E'_+$, 那么 E 的每个正线性泛函数都连续, 因此 E_+ 为 $^c(E, E')$ 完备集. 又由定理 1 知 $E_+(W, f)$ 有界, 所以, $E_+(W, f)$ 的弱闭包 $^c(E', E)$ 紧.

Pareto-optimal 点的存在问题一直是最优化理论研究中甚为关注的问题之一. 控

制论专家 Cerei 首先在 1978 年作了讨论^[4], 随后文 [2 3 5] 都就相关的问题作了研究, 其中的两个主要结论是: 带有 π 性质或角性质锥的 Banach 空间中的每个序有界闭集存在 Pareto-optimal 点. 可以证明, 具有上述锥的 Banach 空间对于 ${}^e(E, E')$ 拓扑都是序凸空间, 其上每一序有界集均为拓扑有界^[6]. 但一般来说, 拓扑有界未必序有界. 事实上, 在序赋范空间中, 每一拓扑有界集都是序有界的充要条件是锥内点非空. 借助于已获得的关于锥的对偶特征, 可以在更一般的序拓扑线性空间上对上述问题作出肯定回答.

定理 4 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 为序局部凸线性拓扑空间, E_+ 闭且具有 π 性质, 那么 E 上每一个非空 ${}^e(E, E')$ 闭有界集 A 存在 Pareto-optimal 点.

证明 任取 $y \in A$, 若集 $A_y = (y + E_+^*) \cap A$ 有 Pareto-optimal 点 x_0 , 则 x_0 也是 A 的 Pareto-optimal 点. 事实上, 若有 $x \in A, x \neq x_0$ 且 $x_1 > x_0 \geq y$, 那么 $x \in (y + E_+^*) \cap A$, 此与 $(y + E_+^*) \cap A = \{x_0\}$ 相矛盾.

由于闭凸锥 E_+ 具有 π 性质, 那么由定理 3 的证明过程可知集 $(y + E_+^*) \cap A$ 为 ${}^e(E, E')$ 紧, 故 A_y 存在 Pareto-optimal 点^[1].

推论 1 设 (X, X_+) 是序线性赋范空间, X_+ 闭且具有 π 性质, $\emptyset \neq A \subset X$ 是有界弱闭集, 则 A 存在 Pareto-optimal 点.

对于角锥的情形有下面定理 5.

定理 5 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 是序局部凸完备线性拓扑空间, 若 E_+ 是闭角锥, 那么 E 上每一个非空有界闭集存在 Pareto-optimal 点.

证明 设非空有界闭集 $A \subset E$, 取 $y \in A$, 记 $A_y = (y + E_+^*) \cap A$. 设 $\{x_T\}_{T \in d}$ 是 A_y 中上升全序集, 由 Zorn's 引理, 只要证 $\{x_T\}$ 有上确界即可.

因 E_+ 为角锥, 设 $f \in U(E', E) - \text{int} E_+^*$, 由于 x_T 单调升, 故 $\{f(x_T)\}$ 在实数域中单调有界, $\{f(x_T)\}$ 为上升 Cauchy 网. 下面证明 $\{x_T\}$ 为 Cauchy 网.

设 V 是 E 中任意一个绝对凸的零点邻域, 则 $U^\circ = (V/2)^\circ$ 是圆, 凸 ${}^e(E', E)$ 紧集, 由于 $f \in U(E', E) - \text{int} E_+^*$, 故存在 $W \supset 0$, 使 $f - WU^\circ \subset E_+^*$, 于是对每个 $g \in U^\circ$ 有 $f - Wg \in E_+^*$, 即 $Wg \leq f$. 再由于 $\{f(x_T)\}_{T \in d}$ 是实数域上 Cauchy 网, 故对 $0 < X < W$, 存在 $T \in d$, 使得 $\forall T_1, T_2 \in d$, 当 $T' < T_1 < T_2$ 时, 便有 $0 < f(x_{T_2} - x_{T_1}) < X$, 于是有 $Wg(x_{T_2} - x_{T_1}) \leq f(x_{T_2} - x_{T_1}) < X$, 由此得 $g(x_{T_2} - x_{T_1}) < XW < 1$.

即 $x_{T_2} - x_{T_1} \in U^\circ \subset U \subset V$, 所以 $\{x_T\}$ 为 Cauchy 网. 又 E 完备, 故存在 $x_0 \in A_y$, $\lim x_T = x_0$. 注意到 x_T 上升, E_+ 闭, 因此有 $x_0 = \sup \{x_T\}$. 证毕.

推论 2 设 (X, X_+) 是序 Banach 空间, 若 X_+ 为闭角锥, 那么 X 上每一个非空有界闭集存在 Pareto-optimal 点.

比较定理 1 与定理 3, 知 π 锥必为角锥, 于是有:

推论 3 设 $(E, \mathcal{P}, E_+)$ 是序局部凸线性拓扑空间且完备, 若 E_+ 闭且具有 π 性质, 那么 E 的每一个非空有界闭集存在 Pareto-optimal 点.

推论 4 设 (X, X_+) 是序 Banach 空间, 若 X_+ 闭且具有 π 性质, 那么 X 的每一个非空有界闭集存在 Pareto-optimal 点.

参 考 文 献

- 1 Corley H W. An existence result for maximization with respect to cones. JOTA, 1980, 31: 277~281
- 2 Chew K L. Maximal points with respect to cone dominance in Banach space and their existence. JOTA, 1984, 44(1): 1~53
- 3 龚循华. 极点存在性定理及 Hilbert 的正半定算子. 江西大学学报, 1988, 12(3): 29~35
- 4 Cesari L, Suryanarayana M B. Existence theorems for Pareto Optimization; Multivalued and Banach space valued functionals. Trans Amer Math Soc, 1978, 244: 317~365
- 5 龚循华. Pareto 极值存在定理. 应用数学学报, 1988, 11(3): 377~379
- 6 Wong Y C. Lecture Notes in Math, 531. Berlin/New York Springer-Verlag, 1976. 28~44
- 7 龚循华. 集合的各种紧性与极点存在性定理. 江西大学学报, 1990, 14(4): 31~38

Existence Results of the Pareto-Optimal Point on Topological Bounded Sets

Lin Jinzhen^{*}

Abstract It is proved that the Pareto-optimal point exists on any weak bounded closed set in an ordered locally convex space with the closed cone with π property and on any bounded closed set in an ordered complete locally convex space with the closed angle cone or closed cone with π property. Meanwhile, a satisfying result uncovering the dual property of the angle cone and the cone with π property is given.

Keywords cone with property (π), angle cone, Pareto-optimal point

^{*} Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275