

# 全充液卫星 Lagrange 情况的自旋稳定判据

刘守圭

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

**摘要** 首先分析了复杂力学系统的数学模型, 然后用大系统加权  $V$  函数方法, 求得对称全充液(作均匀涡旋运动)卫星 Lagrange 情况的自旋稳定条件.

**关键词** 稳定性, 大系统

**分类号** O317

所谓大系统加权  $V$  函数方法, 是把所研究的力学系统视为一个由子系统耦合而成的“大系统”, 然后按数学或物理上的意义, 利用非奇异线性变换, 进行系统结构分解, 在此基础上, 构造加权  $V$  函数, 最后进行全系统稳定性的综合分析. 该方法不要求各子系统具有指数渐近稳定条件, 同时也避免了构造整个力学系统  $V$  函数的困难. 分析表明, 该方法对线性或非线性, 定常或非定常系统的稳定问题均是有效的.

## 1 系统的状态方程与大系统方法

### 1.1 系统的状态方程

一般来说, 一个复杂力学系统的微分方程具有无穷多自由度. 因此构造一个具有有限自由度的“等效系统”是很有意义的.

设  $q_1, \dots, q_n$  是某一完整、理想、非保守力系统的广义坐标, 所受约束不显含  $t$ ;  $T$  为系统的动能,  $U$  为力函数, 则系统的 Lagrange 方程式为<sup>[1]</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \Gamma_j, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

其中,  $\dot{q}_j$  为广义速度,  $R = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{D} \dot{q} + \dot{q}^T \mathbf{F} q$  为阻尼函数,  $\mathbf{D}$  为正定或半正定阻尼矩阵,  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}^T$  为反对称约束阻尼矩阵,  $\Gamma_j$  为陀螺力.

方程(1)是一个受有势力, 陀螺力和阻尼作用的力学系统, 也即“等效系统”的状态方程. 这类方程可以通过一个非奇异线性变换化为矩阵微分方程<sup>[1]</sup>:

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{k} + \mathbf{A}) \mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2)$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维向量,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵;  $\mathbf{B}$  为对称正定或半正定阻尼矩阵,  $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$  为反对称陀

收稿日期: 1994-10-21

螺矩阵,  $k = -k^T$  为反对称约束阻尼矩阵,  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$  为有势力对角形矩阵,  $\lambda_i$  称为稳定系数,  $\Phi(x)$  为不低于二阶的全纯向量函数. 方程(2)的首次近似微分方程为

$$\mathbf{I}\ddot{x} + (\mathbf{B} + \mathbf{G})\dot{x} + (\mathbf{K} + \Lambda)x = 0 \quad (3)$$

若取(2)和(3)的零解  $x=0$  为无扰运动, 则两式即为与之对应的受扰运动微分方程, 从而研究零解的稳定性问题.

## 1.2 大系统加权 $V$ 函数方法

将(3)视为大系统, 对之进行适当的分解成多个带有耦合函数的子系统. 首先对解耦子系统构造  $V_i$  函数, 并以  $V = \sum_{i=1}^n V_i$  作为“大系统”的试验函数, 通过  $V(t, x(t))$  沿“大系统”解的变化率的性质, 来判别整个耦合系统的运动稳定性.

$$\text{令 } y_1 = x, \quad y_2 = \dot{x} + \mathbf{C}x \quad (4)$$

其中,  $y_1, y_2$  是  $n$  维向量,  $\mathbf{C}$  为  $n$  维待定方阵. 则(3)式可变换为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\mathbf{C}y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -\mathbf{E}y_1 + \mathbf{N}y_2 \end{cases} \quad (5a)$$

其中,  $\mathbf{E} = (\mathbf{B} + \mathbf{G})\mathbf{C} - \mathbf{C}^2 - (\mathbf{k} + \Lambda)$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{C} - (\mathbf{B} + \mathbf{G})$ .

如再引进变换  $z_1 = y_1, z_2 = \beta y_1 + y_2$

$$\text{则得 } \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \beta \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} - \beta \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{E} - \beta \mathbf{H} & \beta \mathbf{I} + \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\beta$  为任意小的数,  $\mathbf{H} = \mathbf{N} + \mathbf{C} + \beta \mathbf{I}$ .

1.2.1 大系统的分块 把力学系统(6)划分为两个子系统,

$$S_1: \dot{z}_1 = -(\mathbf{C} + \beta \mathbf{I})z_1 + z_2 \quad (7a)$$

$$S_2: \dot{z}_2 = (\mathbf{E} - \beta \mathbf{H})z_1 + (\beta \mathbf{I} + \mathbf{N})z_2 \quad (7b)$$

再划分为解耦子系统与耦合函数,

$$\text{解耦 } S_1: \dot{z}_1 = -(\mathbf{C} + \beta \mathbf{I})z_1, \quad \text{耦合函数 } h_1 = z_2$$

$$\text{解耦 } S_2: \dot{z}_2 = (\beta \mathbf{I} + \mathbf{N})z_2, \quad \text{耦合函数 } h_2 = (\mathbf{E} - \beta \mathbf{H})z_1$$

1.2.2 构造解耦子系统的  $V_i$  函数

$$\text{解耦 } S_1: V_1 = \frac{1}{2} z_1^T \mathbf{P} z_1$$

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} z_1^T (2\beta \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{C}) z_1 \quad (8a)$$

$$\text{解耦 } S_2: V_2 = \frac{1}{2} z_2^T \mathbf{Q} z_2$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{2} z_2^T (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{N} + 2\beta \mathbf{Q}) z_2 \quad (8b)$$

计算与耦合函数有关的量

$$(\text{grad } V_1)^T h_1 + (\text{grad } V_2)^T h_2 = \frac{1}{2} z_1^T ((\mathbf{P} + \mathbf{P}^T) + (\mathbf{E} - \beta \mathbf{H})^T (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)) z_2 \quad (9)$$

1.2.3 全系统稳定性的综合分析 对于“大系统”(6), 选用  $V = V_1 + V_2$  作为试验函数, 则由(8a)及(8b)

$$V = \frac{1}{2} z_1^T P z_1 + \frac{1}{2} z_2^T Q z_2$$

求  $V$  对时间的全导数, 将(8a), (8b), (9)式代入上式

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2} z_1^T (2\beta P + C^T P + PC) z_1 + \frac{1}{2} z_2^T (N^T Q - Q^T N + 2\beta Q) z_2 \\ & + \frac{1}{2} z_1^T [(P + P^T) + (E - \beta H)^T (Q + Q^T)] z_2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{设} \quad \begin{cases} P \text{ 正定, } Q \text{ 正定, } C^T P + PC \text{ 正定 (或 } C^T P + PC = 0) \\ (P + P^T) + E^T (Q + Q^T) = 0 \\ N^T Q + QN \text{ 负定} \end{cases} \quad (11)$$

由条件(11)知, 函数  $V$  是正定的, 而  $\dot{V}$  的判别式为

$$\begin{bmatrix} -(2\beta P + C^T P + PC) & -\frac{\beta}{2} H^T (Q + Q^T) \\ -\frac{\beta}{2} (Q + Q^T) H & N^T Q + QN + 2\beta Q \end{bmatrix} \quad (12)$$

当  $\beta > 0$  足够小时, 上述判别矩阵行列式的每个主子式满足条件  $(-1)^s \Delta_s > 0$  ( $s=1, 2, \dots, 2n$ ) 因而  $\dot{V}$  是负定的. 因为函数  $V$  不显含时间  $t$ , 由其连续性可知, 它具有无穷小上界, 所以系统(6)是渐近稳定的<sup>[2]</sup>, 即系统(3)渐近稳定的条件为(11).

对于非线性系统(2), 由于  $\frac{\|\Phi(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$  (当  $\|x\| \rightarrow 0$  时), 此时高阶小量  $\|\Phi(x)\|$  不影响 Ляпунов 函数  $V$  已经是定号的基本性质, 因此其渐近稳定的条件也为(11).

类似地, 对于非正常非线性系统, 也可以找到零解大范围一致渐近稳定的条件<sup>[3]</sup>.

## 2 对称全充液(作均匀涡旋运动)卫星的自旋稳定条件

设惯性坐标系  $OXYZ$  以及与刚体固结的动坐标系  $oxyz$ . 考虑一个对称椭球腔内全充理想不可压缩流体. 腔的 3 个半轴为  $a_0, a_0, c_0$ ;  $p, q, r$  为壳体角速度在动坐标上的投影. 并设铅垂轴  $OZ$  与动坐标三轴夹角余弦为  $\alpha, \beta, \varphi$ .

则系统的动能为:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + 2Fpp_1 + 2Gqq_1 + 2Hrr_1 \quad (13)$$

其中,  $p_1, q_1, r_1$  为液体相对于外壳角速度在动坐标上投影.  $A, B, C$  为系统对主轴的转动惯量,  $A_1, B_1, C_1$  以及  $F, G, H$  为液体相对主轴的转动惯量以及惯性积.

又设系统的质量为  $M$  (外壳质量不计), 质心在动坐标系中的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ . 将  $T$  代入空腔充液系统的 Lagrange 方程与液体涡旋运动的 Helmholtz 方程, 系统的运动方程为<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} A\dot{p} + F\dot{p}_1 - Bqr - Grq_1 + Cqr + Hqr_1 = Mg(z_0\beta - \varphi y_0) \\ B\dot{q} + G\dot{q}_1 - Cpr - Hpr_1 + Apr + Frp_1 = Mg(x_0\varphi - z_0\alpha) \\ C\dot{r} + H\dot{r}_1 - Apq - Fqp_1 + Bpq + Gpq_1 = 0 \\ A_1\dot{p}_1 + F\dot{p} + B_1q_1r_1 + Gqr_1 - C_1q_1r_1 - Hrq_1 = 0 \\ B_1\dot{q}_1 + G\dot{q} + C_1p_1r_1 + Hrp_1 - A_1p_1r_1 - Fpr_1 = 0 \\ C_1\dot{r}_1 - H\dot{r} + A_1p_1q_1 + Fpq_1 - B_1p_1q_1 - Gqp_1 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

还有 Poisson 方程

$$\dot{\alpha} = \beta r - \varphi q, \quad \dot{\beta} = \varphi p - \alpha r, \quad \dot{\varphi} = \alpha q - \beta p \quad (15)$$

考虑系统的稳态运动为

$$\begin{aligned} p=0, q=0, r=\omega=\text{const}; \quad p_1=0, q_1=0, r_1=0; \\ \alpha=0, \beta=0, \varphi=1; \quad x_0=0, y_0=0, z_0=z_0 \end{aligned} \quad (16)$$

则受扰运动为

$$p=p, q=q, r=\omega+r_2, \quad p_1=p_1, q_1=q_1, r_1=r_1, \quad \alpha=\alpha, \beta=\beta, \varphi=1+\delta \quad (17)$$

又令  $\lambda = \frac{c_0}{a_0}$ ,  $a = \frac{2\lambda}{(1-\lambda^2)^2}$ ,  $b = \frac{1+\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$ ,  $c = \frac{-\lambda}{1-\lambda^2}$ ,  $d = \frac{-1}{1-\lambda^2}$ ,  $c=c_0$  则(14)的受扰运动方程及 Poisson 方程具有以下非线性形式:

$$\begin{cases} \dot{p} = -b(1-\lambda^2)qr_2 - b(1-\lambda^2)\omega q + 2dqr_1 + 2cr_2q_1 + 2c\omega q_1 + a(\lambda^2-1)q_1r_1 + \frac{2b}{C_0}Mgz_0\beta \\ \dot{p}_1 = a(1-\lambda^2)qr_2 + a(1-\lambda^2)\omega q - 2d\omega q_1 - 2dr_2q_1 - 2cqr_1 - b(\lambda^2-1)q_1r_1 - \frac{2a}{c_0}Mgz_0\beta \\ \dot{q} = -b(\lambda^2-1)pr_2 - b(\lambda^2-1)\omega p - 2dpr_1 - 2cr_2p_1 - 2c\omega p_1 - a(1-\lambda^2)p_1r_1 - \frac{2b}{c_0}Mgz_0\alpha \\ \dot{q}_1 = a(\lambda^2-1)\omega p + a(\lambda^2-1)pr_2 + 2cpr_1 + 2dr_2p_1 + 2d\omega p_1 - b(1-\lambda^2)p_1r_1 + \frac{2a}{c_0}Mgz_0\alpha \\ \dot{r}_1 = -\lambda p q_1 + \lambda p_1 q, \quad \dot{r}_2 = 0 \\ \dot{\alpha} = \beta\omega + \beta r_2 - q - q\delta, \quad \dot{\beta} = p + p\delta - \alpha\omega - \alpha r_2, \quad \dot{\delta} = \alpha q - \beta p \end{cases} \quad (18)$$

选第一、第二、第七个方程为子系统  $S_1$ :

$$\text{则 } z_1^T = (p, p_1, \alpha)$$

解耦子系统为:  $\dot{p} = -p$ ,  $\dot{p}_1 = -p_1$ ,  $\dot{\alpha} = -\alpha$ , 耦合函数  $h_1$  由(18)式极易确定. 对解耦  $S_1$

构造函数  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^T D z_1$ , 其中,  $D$  为  $3 \times 3$  对称常阵.  $V_1$  关于子系统  $S_1$  对时间求导有

$$\dot{V}_1 = -z_1^T D z_1, \text{ 还有 } (\text{grad } V_1)^T h_1 = z_1^T D h_1$$

$$S_2 \text{ 的解耦子系统为 } \dot{z}_2 = -z_2$$

其中,  $z_2^T = (q, q_1, \beta)$ , 耦合函数  $h_2$  也可由(18)确定. 对  $S_2$  构造  $V_2 = \frac{1}{2}z_2^T E z_2$ ,  $V_2 = -$

$$z_2^T E z_2, (\text{grad } V_2)^T h_2 = z_2^T E h_2$$

$$S_3 \text{ 的解耦子系统为 } \dot{z}_3 = -z_3$$

其中,  $z_3^T = (r_2, r_1, \delta)$

$$\text{耦合函数 } h_3 = \begin{bmatrix} r_3 \\ -\lambda p q_1 + \lambda p_1 q + r_1 \\ \alpha q - p\beta + \delta \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{2}z_3^T F z_3, \quad \dot{V}_3 = -z_3^T F z_3 \quad (\text{grad } V_3)^T h_3 = z_3^T F h_3$$

令  $V = V_1 + V_2 + V_3$  为系统(18)的 ЛЯПУНОВ 函数, 若  $D, E, F$  正定, 则  $V$  为正定函数,

$$\dot{V} = -z_1^T D z_1 - z_2^T E z_2 - z_3^T F z_3 + z_1^T D h_1 + z_2^T E h_2 + z_3^T F h_3 \quad (19)$$

若能找到正定的  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{F}$  使(19)为0,则可以确定无扰运动是稳定的.

为此,令  $\mathbf{D}=[D_{ij}]$ ,  $\mathbf{E}=[E_{ij}]$ ;  $\mathbf{F}=[F_{ij}]$ ;  $(i, j=1, 2, 3)$

为书写方便令  $b_0=b(1-\lambda^2)$ ,  $a_0=a(1-\lambda^2)$ ,  $e_0=\frac{2b}{c_0}Mgz_0$ ,  $f_0=-\frac{2a}{c_0}Mgz_0$

将  $V$  展开合并同类项,若要  $\dot{V}=0$ ,只需使各同类项前系数为0. 由此有关系式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}=\mathbf{E} \\ D_{11}=(1+\frac{1-\lambda^2}{2\omega\lambda})D_{23} \quad D_{12}=\lambda D_{23} \quad D_{13}=\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}D_{23} \\ D_{22}=\frac{1+\lambda^2}{2}D_{23} \\ D_{33}=(\frac{2}{\lambda^2-1}\frac{Mgz_0}{c_0}-\frac{Mgz_0}{c_0}\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{1}{\omega\lambda}-\frac{\omega}{\lambda})D_{23} \\ F_{11}\text{任意} \\ F_{12}=-\frac{1}{\omega\lambda}D_{23} \quad F_{22}=-\frac{1}{\omega\lambda}D_{23} \quad F_{13}=\frac{D_{23}}{\lambda} \quad F_{23}=\frac{D_{23}}{\lambda} \quad F_{33}=D_{33} \end{array} \right. \quad (20)$$

(20)即使  $\dot{V}\equiv 0$  的条件.

进而讨论  $V$  正定的条件,易知  $\mathbf{D}$  正定( $\mathbf{E}$  亦然)的条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11}>0 \quad D_{11}D_{22}-D_{12}^2>0 \\ D_{11}D_{22}D_{33}+2D_{12}D_{23}D_{13}-D_{13}^2D_{22}-D_{23}^2D_{11}-D_{12}^2D_{33}>0 \end{array} \right. \quad (21)$$

$\mathbf{F}$  正定的条件分  $\omega>0$  及  $\omega<0$ ,两种情况讨论:

$$\omega>0 \text{ 时 } \mathbf{F} \text{ 正定的条件为 } 2+\frac{1+\lambda^2}{\omega\lambda}>0 \quad (22)$$

$\omega>0$  时,  $\mathbf{F}$  的二阶主子式不可能为正,因此构造的  $V$  不能作为 ЛЯПУНОВ 函数,要另辟途径. 为了获得对于所有  $\omega$  一致的稳定判据,对系统(18)对应的线性化方程,用类似的构造子系统以及  $V$  函数的方法,由  $\dot{V}=0$  的条件有关系式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}=\mathbf{E} \\ D_{23}=2(D_{12}d-E_{11}c)\omega+(aD_{22}-bD_{12})(1-\lambda^2)\omega \\ \frac{2Mgz_0}{c_0}(bD_{12}-aD_{22})+D_{23}\omega+2(E_{23}d-E_{13}c)\omega=0 \\ \frac{2Mgz_0}{c_0}(bD_{11}-aD_{12})+D_{13}\omega+(aE_{23}-bE_{13})(\lambda^2-1)\omega+E_{33}=0 \\ \mathbf{F} \text{ 为任意正定阵} \end{array} \right. \quad (23)$$

$\mathbf{D}$  共有6个元素,但只有3个约束方程,可选择其元素同时满足(20)式中  $\mathbf{D}$  元素之间关系,此时,  $\mathbf{D}$  正定( $\mathbf{E}$  亦然)的条件也为(21)式,由于  $\omega>0$ , (22)式自然成立.

对于所有情况,稳定判据可取一致的形式即(21), (22)式. 当系统的参数满足以上判据时,则无扰运动稳定.

以全充液 Euler 情况为例,此时  $z_0=0$ . 若令  $D_{11}>0$ ,  $D$  正定的条件为  $\lambda>3$  或  $\lambda<1$ , 也即无扰运动的稳定条件. 该结果最早由 Poincare, Lamb 等人利用线性化方程求特征根的方法求得. Как 利用系统的3个首次积分,遵循 Чераев 方法研究了这个问题的非线性命题. 本文将此问题作为全充液的 Lagrange 情况的一个特例进行研究,用大系统加权

V 函数方法求出相同的自旋稳定的条件.

### 参 考 文 献

- 1 王照林. 运动稳定性与卫星姿态动力学. 力学进展, 1980, 4:50
- 2 王照林. 现代控制理论基础. 北京:国防工业出版社, 1981
- 3 王照林, 刘守圭. 大系统方法与卫星姿态动力学. 空间科学学报, 1983, 3(2):81
- 4 Lamb H. Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 1932

## Attitude Stability Criterion of Spinning-Satellite Fully Filled with Fluid in Lagrangian Case

*Liu Shouqui* \*

**Abstract** First, the mathematical model for complicated mechanical system is studied. Then the stability criterion of spinning-satellite fully filled with fluid (in uniform whirl motion) in Lagrangian case is obtained by using the method of large-scale system with weighted V function.

**Keywords** stability, large-scale system

---

\* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275