

湖泊风生流的三维数值模拟

黄 平

(中山大学环境科学系, 广州 510275)

摘 要 本文建立了湖泊风生流的三维数学模型, 并采用交错网格的差分方法求解, 该模型被用于武汉市墨水湖的风生流模拟, 实测计算表明: 该模型算法程序简单, 计算结果合理, 能较真实的反映湖泊风生流的流态特征.

关键词 湖泊, 风生流, 三维数值模拟

通常大多数湖泊的自然流动趋势较弱, 水流走向常受湖泊表面的风向支配. 在工程应用中, 为了解湖泊风生流的水文、水力特征, 常用二维平面不稳定流方程来模拟湖泊流速分布情况. 但由于二维水流模型仅能描述垂线平均的流速与流向, 故一旦因风生流造成不同深度的水层有完全不同的流向时, 二维水流模型的计算结果就很难反映真实的流动, 因此, 要正确地模拟湖泊的风生流, 须依靠三维水流数学模型的建立.

1 控制方程

假定湖水等密度分布, 垂向服从静水压力分布, 于是在笛卡尔坐标系下的湖泊风生流的三维流动可用如下方程描述

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{d} \frac{\partial p}{\partial x} + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{d} \frac{\partial f_x}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{d} \frac{\partial p}{\partial y} + A_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{d} \frac{\partial f_y}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + dg = 0 \quad (4)$$

式中, u, v, w 分别表示 x, y, z 方向上的流速分量; t 为时间; g 为重力加速度; f 为柯氏参数; p 为水压; d 为水的密度; A_x, A_y 分别为 x, y 方向上的涡动粘滞系数; f_x, f_y 分别为 x, y 方向上因流速剪切交形引起的附加切应力.

如在水深方向上, 将水体分成 K 层, 则由式 (1)~ (4) 可推算得第 k 层水流的连

续方程与动量方程如下

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (H_k u_k) + \frac{\partial}{\partial y} (H_k v_k) \right\} = 0 \quad (5)$$

$$w^{k-} = w^{k+} - H_k \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial u_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_k}{\partial z} = f v_k - g \frac{\partial Z}{\partial x} + A_x \frac{\partial u_k}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial u_k}{\partial y^2} + \frac{1}{d H_k} (f_{x,k-} - f_{x,k+}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + w_k \frac{\partial v_k}{\partial z} = -f u_k - g \frac{\partial Z}{\partial y} + A_x \frac{\partial v_k}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial v_k}{\partial y^2} + \frac{1}{d H_k} (f_{y,k-} - f_{y,k+}) \quad (8)$$

式中, Z 为水位; H_k 为第 k 水层的厚度; u_k, v_k 分别为 k 水层中 x, y 方向的流速分量; w^{k-}, w^{k+} 分别是 k 水层上下表面的 z 方向流速分量; $f_{x,k-}, f_{x,k+}, f_{y,k-}, f_{y,k+}$ 分别为 k 水层上下表面处的 x, y 方向上的切应力。

各水层面的切应力计算公式如下

① 湖底面

$$f_{x,k+} = d g u_k (u_k^2 + v_k^2)^{1/2} c^2$$

$$f_{y,k+} = d g v_k (u_k^2 + v_k^2)^{1/2} c^2$$

② 湖水面

$$f_{x,-} = d_a w_x (w_x^2 + w_y^2)^{1/2} \alpha$$

$$f_{y,-} = d_a w_y (w_x^2 + w_y^2)^{1/2} \alpha$$

③ 水层内部

$$f_{x,k-} = d V_i^2 (u_{k-1} - u_k) \left[(u_{k-1} - u_k)^2 + (v_{k-1} - v_k)^2 \right]^{1/2}$$

$$f_{y,k-} = d V_i^2 (v_{k-1} - v_k) \left[(u_{k-1} - u_k)^2 + (v_{k-1} - v_k)^2 \right]^{1/2}$$

式中, c 为谢才系数; d 为空气密度; α 为风阻力系数; w_x, w_y 为 10m 高空处 x, y 方向上的风速分量; V_i 为内部界面阻力系数; 其余符号同式 (1) ~ (8)。

在与其它水域相通的开边界上, 采用水位实测值控制, 在陆地闭边界上, 取法向流速为零, 初始条件取各计算点的流速为零, 各计算点的水位则据边界水位值内插得到。

2 差分算法

采用 Arakawa c 交错网格的差分形式离散式 (4) ~ (8), 各计算参数在网格中的位置如图 1 所示。

为简化差分表达式, 引进下述记号 F 为最靠近计算点的 2 个 F 值的平均, \bar{F} 为最靠近计算点的 4 个 F 值的平均, ΔF 为相邻两点的 F 值之差, 序号大者在前。

式 (4) ~ (8) 的差分方程如下

$$Z^{n+1} = Z^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^K \Delta (H_k u_k)^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \sum_{k=1}^K \Delta (H_k v_k) \quad \text{在 } (i, j) \quad (9)$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t u_k^{n+1} \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} \right]^n - \Delta t v_k^n \left[\frac{\partial u_k}{\partial y} \right]^n - \Delta t w_k^n \left[\frac{\partial u_k}{\partial z} \right]^n + \Delta t f v_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} g \Delta Z^{n+1} +$$

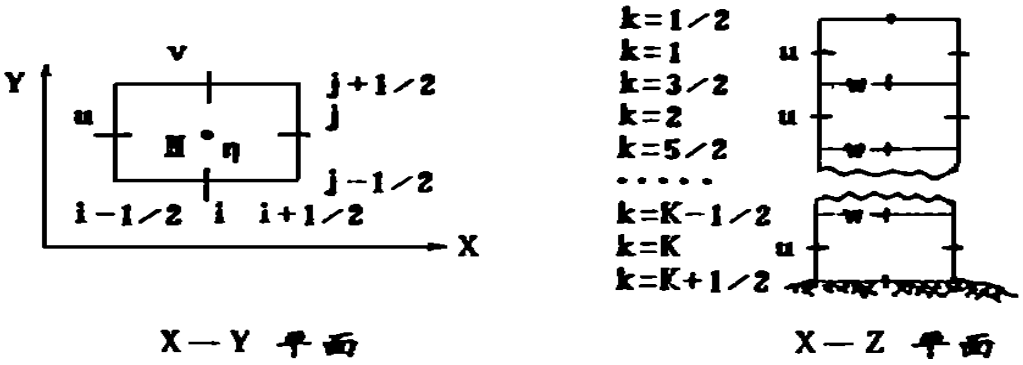


图 1 差分格式

Fig. 1 Arrangement of difference grid points

$$\Delta t A_x \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right)^n + \Delta t A_y \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \right)^n + \frac{\Delta t}{d H_k^n} (f_{x,k-\%}^n - f_{x,k+\%}^n)$$

在 $(i - \frac{1}{2}, j)$ (10)

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \Delta t \bar{w}_k^n \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^n - \Delta t v_k^{n+1} \left(\frac{\partial v_k}{\partial y} \right)^n - \Delta t \bar{w}_k^n \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^n - \Delta t f \bar{w}_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} g \Delta Z^{n+1} +$$

$$\Delta t A_x \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} \right)^n + \Delta t A_y \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} \right)^n + \frac{\Delta t}{d H_k^n} (f_{y,k-\%}^n - f_{y,k+\%}^n)$$

在 $(i, j - \frac{1}{2})$ (11)

$$w_k^{n+1} = w_k^{n+1} - H_k \Delta u_k^{n+1} \Delta x - H_k \Delta v_k^{n+1} \Delta y \quad \text{在 } (i, j) \quad (12)$$

式中, $\Delta x, \Delta y$ 分别为 x, y 方向上的空间步长; Δt 为时间步长; i, j 分别为 x, y 方向上的计算点序号; n 为计算时层序号; u, v 关于 x, y, z 的偏导数采用中心差分近似, 即

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} \right)_{i-\%,j} &= (u_{k,i+\%,j} - u_{k,i-\%,j}) / (2\Delta x) \\ \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} \right)_{i-\%,j} &= (u_{k,i-\%,j+1} - u_{k,i-\%,j-1}) / (2\Delta y) \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right)_{i-\%,j} &= (u_{k,i+\%,j} + u_{k,i-\%,j} - 2u_{k,i-\%,j}) \Delta x^2 \\ \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \right)_{i-\%,j} &= (u_{k,i-\%,j+1} + u_{k,i-\%,j-1} - 2u_{k,i-\%,j}) \Delta y^2 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

差分方程的计算步骤为, 首先据式 (9) 求出水位, 然后据式 (10) 和 (11) 求出各水层的水平流速分量; 最后用式 (12) 算出垂向上的流速分量; 重复上述步骤, 直至计算结束.

3 计算实例

墨水湖位于武汉市汉阳区西南, 是一个城市中的小型浅水湖泊, 其汇水面积为 21.90km^2 , 湖盆呈浅碟型, 湖长 5.10km , 湖水面积 3.35km^2 , 平均水深 1.35m (见图 2)。

长期以来, 墨水湖是废、污水的接纳地, 目前湖水已变黑发臭, 严重影响城市卫生与市民的生活^[1]。为制订墨水湖的环境保护措施, 需要模拟该湖的水流运动, 以便为研究湖中污染物的混合提供基本的水力数据。

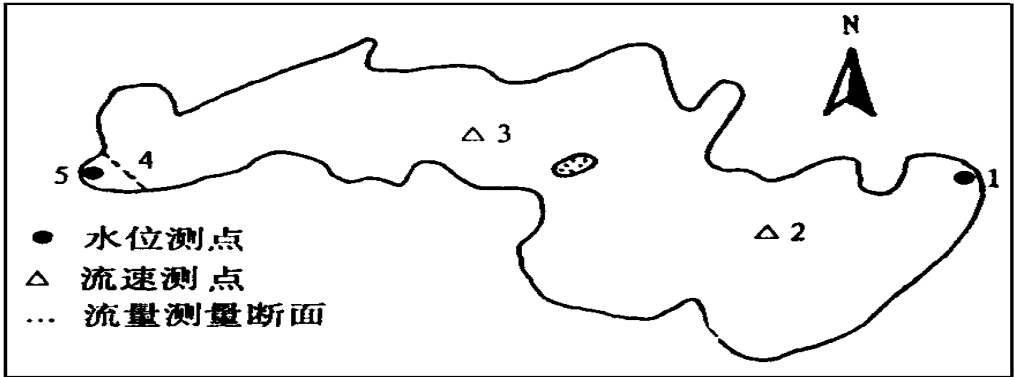


图 2 墨水湖水域与测点布设示意图

Fig. 2 Moshuihu lake waters and the distribution of the measured points

根据墨水湖水域的地形图以及现场的水位、流速监测资料, 本文利用上述方程建立了墨水湖的三维风生流模型, 对湖水的自然流动与风生流进行了模拟。

计算时 $x-y$ 坐标平面位于湖平均水位的平面上, 并向下将水体均分成三层, 层厚为 0.45m 。开边界上的水位由测点 1 与测点 5 处的水位观测提供, 空间步长 $\Delta x = \Delta y = 110\text{m}$, 时间步长 $\Delta t = 20\text{s}$, 满足稳定条件 $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2gL}$ (L 为水深); 另外 $c = 26.28$, $V_i^0 = 0.01$, $A_x = A_y = 17\text{m}^2/\text{s}$, 这几个参数值是根据模型计算值与测点处的流速记录的拟合情况, 试算得到。

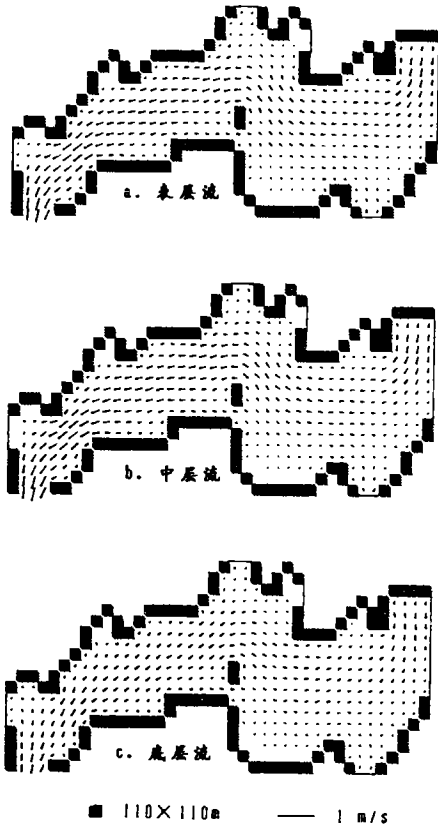
由表可知, 流速、流量实测值与模型计算值吻合较好。

表 1 流速和流量的实测值与计算值

Tab. 1 Measured and computed values of flow

项目	流速 (m/s)						流量 (m^3/s)
	2' 表层	2' 中层	2' 底层	3' 表层	3' 中层	3' 底层	
实测值	0.12	0.12	0.04	0.16	0.14	0.06	98.0
计算值	0.11	0.10	0.06	0.14	0.13	0.08	94.0

图3是无风情况下,墨水湖3个水层流动情况的模拟结果.由于图2中的测点1(湖泊的主要进水口在该测点附近)水位要比测点5略高些,因此墨水湖的水流通常是由测点1沿湖长向测点5(测点旁侧为墨水湖的主要出水口)流动.由图3知,自然流动的趋势明显,但流速在大部份水域中均较小,仅在出口处稍微变大;表、中层的流速大小相近,底层较小,但流向均基本相同.



3 各水层的平面流场 (自然流动)

Fig. 3 The flow fields of surface, middle and bottom layers (natural flow)

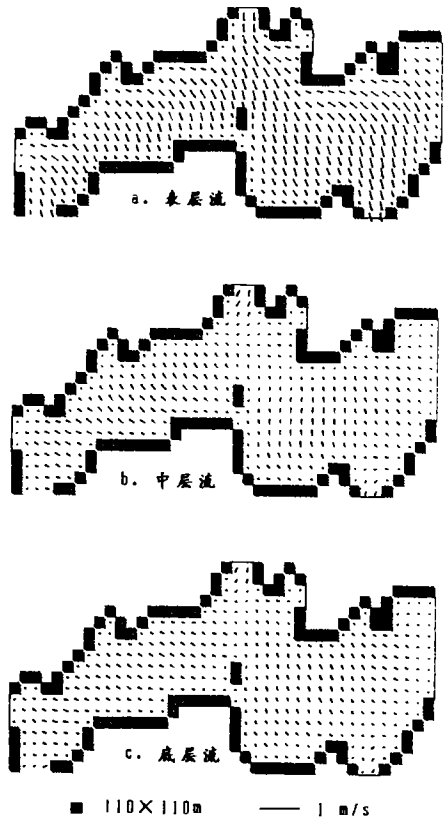


图4 各水层的平面流场 (风生流)

Fig. 4 The flow fields of surface, middle and bottom layers (wind-driven water current)

武汉市冬季多为西北风,图4是西北风(湖面10m高空处的风速为 6.5 m/s ,风向为北偏西 67°)持续较长时间时,墨水湖表、中、底层流场的模拟结果,计算时空气密度 $\rho_a = 1.25 \times 10^{-3}\text{ g/cm}^3$;风阻力系数 $c_w = 2.56 \times 10^{-6}$.

由图4知,受风力作用,表层流的流速较大,流向与自然流动时全然不同,它受风向与湖域地形的支配,而中底层的水流流速较小,流向则基本上与表层流相反,呈补偿现象,这与文[3]实测风生流的垂向分布的趋势是一样的,其表、底层的流速也呈相反现象,这说明本文模型的计算结果是合理的.

由流场模拟结果可以看出,湖泊风生流流态复杂,通常由于风力对表层水体作用较

大, 而对底层影响较弱, 故风生流出现时, 水体表层流速较大, 流向受风向支配, 底层则出现补偿流动, 流速较小, 流向与表层流相反, 这与国外的研究结果相一致.

当水体上下层的流向相差不大时, 二维水流模型的计算结果是可用的, 但当出现表底层流向相差较大的流态时, 它的计算结果就难以反映真实, 因此, 在模拟湖泊风生流时, 应该采用三维水流模型.

实例计算表明, 本文采用的差分格式简单, 计算程序易编, 只要时间步长满足稳定条件, 计算结果就合理可信, 无需作平滑处理.

参 考 文 献

- 1 毛荣生, 黄平. 墨水湖 N/P水质模型研究. 湖泊科学, 1994, 6(4)
- 2 赵士清. 长江口三维潮流的数值模拟. 水利水运科学研究, 1985, (1)
- 3 Baines W D, Knapp D J. Wind-driven water currents. J Hydraulic Div, ASCE, 1965, 91 (HY2): 205~ 221

Three-Dimensional Numerical Simulation of Wind-Driven Water Current in a Lake

Huang Ping^{*}

Abstract A three-dimensional model of wind-driven water current is developed in the paper. The finite difference method of the Arakawa c-grid is employed to obtain the numerical simulation. The model is used in the simulation of wind-driven water current in Moshuihu lake. The real case shows that the computer program of the difference method is simple and the calculated results is rational. The three-dimensional model can describe better the structural characteristic of wind-driven water current in a lake.

Keywords lake, wind-driven water current, 3-D numerical simulation

^{*} Department of Environmental Science, Zhongshan University, Guangzhou 510275