

广义特征值摄动问题的逐步逼近法^{*}

刘济科 高磊

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 以子空间缩聚及正交分解为基础, 根据实矩阵的奇异值分解定理, 对广义特征值摄动问题, 提出了一种能同时有效地处理孤立特征值、相重特征值及相近特征值三种不同情况的逐步逼近法. 计算实例表明, 该方法合理可靠、精度高.

关键词 摄动, 特征值问题, 结构振动

分类号 TH 113. 1

一个振动系统的刚度矩阵或质量矩阵发生小变化后, 其固有频率和振型必有相应的变化. 这种变化一直是结构动力学的研究热点之一. 一般说来, 按照原始系统的特征值是否为特征方程的单根, 重根或密集 (相近) 根三种情况, 需要应用三种不同的摄动法. 对于特征值是实单根的情况, 已有的摄动法已很完善^[1~3]; 而对于重根或近根情况, 虽然许多学者对此提出了各种不同的解法^[2,3], 但尚未达到尽善尽美的程度. 作者等^[4]曾利用子空间正交分解原理, 提出了一种能同时有效地处理上述三种不同情况的通用的摄动方法. 本文基于实矩阵的奇异值分解定理, 提出一种逐步逼近法. 该法的主要优点是不必采用模态展开的形式 (在模态不完备时, 模态展开遇到困难), 推导过程简捷, 公式紧凑, 且对三种特征值情况也均完全适用. 因此, 与文 [4] 的方法相比, 本文方法是另一种通用的矩阵摄动法.

1 缩聚系统的特征解^[2]

设原始 (未摄动) 系统的 n 阶广义特征值问题是

$$K_0 x_{i0} = \lambda_{i0} M_0 x_{i0} \quad (i = 1 \sim n) \quad (1)$$

其中, M_0 , K_0 分别是 $n \times n$ 阶对称质量阵、刚度阵, λ_{i0} , x_{i0} 分别是原系统特征值及相应的特征向量. 不失一般性, 设特征值满足 $\lambda_{10} < \lambda_{20} < \cdots < \lambda_{j0} = (\approx) \lambda_{k0} < \cdots < \lambda_{n0}$ (这表明系统第 $j \sim k$ 阶特征值是相重或相近特征值), 且特征向量满足正交规范条件

$$x_{i0}^T M_0 x_{j0} = W_j \quad (i, j = 1 \sim n) \quad (2)$$

其中, W_j 是 Kronecker 函数, 当 $i = j$ 时, $W_j = 1$, 当 $i \neq j$ 时, $W_j = 0$.

又设摄动系统的质量阵是 $M = M_0 + M_1$, 刚度阵是 $K = K_0 + K_1$, 则摄动系统的特征值问题是

* 广东省自然科学基金 (960030) 及西安交通大学国家重点实验室开放研究基金资助项目

收稿日期: 1996-09-10 刘济科, 男, 29岁, 副教授

$$(K_0 + K_1) x_i = \lambda_i (M_0 + M_1) x_i \quad (i = 1 \sim n) \quad (3)$$

其中, M_1, K_1 (均为一阶小量) 分别表示 M_0, K_0 的变化量, 也是对称矩阵, λ_i, x_i 分别是新系统的特征值及相应的特征向量.

首先选择原系统的特征向量张成一特征子空间 H . 不失一般性, 选相重或相近特征值所对应的特征向量, 即 $\lambda_{i0} \sim \lambda_{k0}$ 对应的 $x_{i0} \sim x_{k0}$ 张成子空间 $H = [x_{j0}, \dots, x_{k0}]$. 当 M_0, K_0 分别增加 M_1, K_1 后, 特征向量列阵的变化可能不小, 但可以认为新旧两个特征子空间的夹角还是小的. 因此, 可把新系统的特征向量列阵 x_i 对原有的特征子空间作正交分解:

$$x_i = H q_i + W_i \\ H^T M_0 W_i = H^T K_0 W_i = 0 \quad (i = j \sim k) \quad (4)$$

显然, q 是一个 $(k - j + 1)$ 阶列阵, 与 M_1, K_1 有关, 而 W_i 是一阶小量.

根据变分原理, 并利用 (4) 式中正交条件, 得

$$\bar{K} q = \bar{M} q_i \quad (i = j \sim k) \quad (5)$$

其中, $\bar{K} = H^T (K_0 + K_1) H$, $\bar{M} = H^T (M_0 + M_1) H$, 且上式中已略去二阶以上的小量, 而 $\bar{M}$ 是 λ_i 的一种近似, 比 $H q_i$ 高一阶精度.

新系统 (3) 相应的归一化条件是 $(H q_i + W_i)^T (M_0 + M_1) (H q_i + W_i) = 1$

略去二阶以上小量, 再利用正交条件得到与 (5) 式相应的归一化条件

$$q_i^T \bar{M} q = 1 \quad (i = j \sim k) \quad (6)$$

(5)、(6) 式构成了一个新 (即缩聚系统) 的标准广义特征值问题, 解之可确定 $\bar{M}$ 和 q_i . 这组方程的特征解有 $(k - j + 1)$ 对, 即 $(\bar{M}_j, q_j), \dots, (\bar{M}_k, q_k)$. 例如, 若选三个特征向量张成子空间 H , 则有三对特征解, 依此类推. 由于新旧两个对应的特征子空间只夹一小角, 那么这样求得的 $H q$ 就只有一阶小量的误差, 从而 $\bar{M}$ 只有二阶小量的误差. 这样的精度一般已能满足实际需要了.

2 基于奇异值分解的逐步逼近法

如果需要更精确的近似解, 那么可将摄动系统的 λ_i, x_i ($i = j \sim k$) 写成逐步逼近的格式, 即

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i + \lambda_{i2} + O(\bar{X}) \quad (7)$$

$$x_i = H q_i + x_{i1} + x_{i2} + O(\bar{X}) \quad (8)$$

很明显, 式中 $x_{i1} \sim O(\bar{X}), \lambda_{i2}, x_{i2} \sim O(\bar{X}^2)$. (7) 式在形式上似乎少了一项, 其实是因为 $\bar{M}$ 本身具有一阶精度的缘故.

(8) 式也可视为是对 x_i 进行的正交分解, 由 (4) 式得: $W_i = x_{i1} + x_{i2} + O(\bar{X}^3)$.

将 λ_i, x_i 的表达式 (7)、(8) 式代入基本特征方程 (3), 并化简可得

$$\lambda_{i2} q_i^T H^T M_0 H q = q_i^T H^T (K_1 - \bar{M}_i M_1) x_{i1} \quad (9)$$

由 (2) 式得: $H^T M_0 H = I$ (单位阵), 代入 (9) 式, 即可得特征值的二阶摄动解:

$$\lambda_{i2} = [q_i^T H^T (K_1 - \bar{M}_i M_1) / q_i^T q_i] x_{i1} \quad (i = j \sim k) \quad (10)$$

现在的任务是来确定 x_{i1}, x_{i2} 等. 为此, 再将 (7)、(8) 式代入 (3) 式, 然后展开, 合并同阶项, 忽略三阶及三阶以上项, 可得

$$O(\bar{X}): (K_0 - \bar{M}_i M_0) x_{i1} = - [(K_0 + K_1) - \bar{M}_i (M_0 + M_1)] H q_i \quad (11)$$

$$O(\bar{X}^2): (K_0 - \bar{M}_i M_0) x_{i2} = - K_1 x_{i1} - \bar{M}_i M_1 x_{i1} + \lambda_{i2} M_0 H q_i \quad (12)$$

将 $W_{xi} = x_{i1} + x_{i2}$ 代入 (3) 的归一化条件展开, 合并同阶项, 并利用 (6) 式, 可得

$$O(X): \quad (H_q)^T M_0 x_{i1} = 0 \quad (13)$$

$$O(X^2): \quad (H_q)^T M_0 x_{i2} = - (H_q)^T M_1 x_{i1} - x_{i1}^T M_0 x_{i1} / 2 \quad (14)$$

前已指出, $\underline{\lambda}_i$ 是 λ_i 的一种近似. 根据有关代数特征值摄动理论, 如果摄动量是一阶小量, 则 $\underline{\lambda}_i$ 与原特征值 λ_{i0} 相比, 一般说来, 其修改量最多也只是一阶小量, 因此 $(K_0 - \underline{\lambda}_i M_0)$ 就是接近奇异的矩阵, 不能按解方程组的常规方法由 (11) 式解出 x_{i1} ; 另一方面, 还有可能出现 $\underline{\lambda}_i$ 与原特征值中的某一个特征值相等的情况, 此时 $(K_0 - \underline{\lambda}_i M_0)$ 就是奇异矩阵, (11) 式只能提供 $(n-1)$ 个条件, 不能唯一确定 x_{i1} 中的 n 个未知数, 故还必须补充一个条件. (13) 式即是通过正交规范化条件得到的一个补充条件. 这样, 从 (11)、(13) 两式出发, 应用矩阵奇异值分解定理, 可求得 x_{i1} 的最小二乘解.

合并方程 (11)、(13), 可得

$$Ax_{i1} = b \quad (15)$$

$$\text{其中, } A_{(n+1, n)} = \begin{bmatrix} K_0 - \underline{\lambda}_i M_0 \\ (H_q)^T M_0 \end{bmatrix}, \quad b_{(n+1, 1)} = \begin{bmatrix} - [(K_0 + K_1) - \underline{\lambda}_i (M_0 + M_1)] H_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

简单地说, 对任一 $(m \times n)$ 阶实矩阵 A , 求正交矩阵 U 和 V , 使 $A = U W V^T$, 其中: $W = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ 是矩阵 $A^T A$ 的 n 个特征值的非负平方根. 这一过程就是所谓的实矩阵的奇异值分解.

对于线性方程组 (15), 设已对 A 进行了奇异值分解, 则 (15) 式的最小二乘解是

$$x_{i1} = A^+ b \quad (16)$$

其中 A^+ 表示 A 的广义逆, 且有 $A^+ = V W^* U^T$, $W^* = \text{diag}(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$: 当 $k_i = 0$ 时, $k_i^* = 0$, 当 $k_i \neq 0$ 时, $k_i^* = 1/k_i$.

若线性方程组 (15) 有解, 则上述最小二乘解 (16) 即是线性方程组的解. 于是我们求得了特征向量的一阶摄动解 x_{i1} ($i = j-k$).

至于其它 ($i \neq j-k$) 孤立特征值情况, 虽可按常规的单根情形的摄动公式求解, 但事实上, 也完全可按本文方法方便地进行求解: 只须将特征子空间 H 选为某一阶特征向量, 不妨令 $H = x_{i0}$, 即可按以上步骤求得对应该特征向量 x_{i0} 的一阶摄动解 x_{i1} . 求得 x_{i1} 后, 由 (10) 式即完全确定了 λ_{i2} .

同理, 合并方程 (12)、(14), 可以得到另一个线性方程组

$$Ax_{i2} = \bar{b} \quad (17)$$

$$\text{其中, } \bar{b} = \begin{bmatrix} - (K_1 - \underline{\lambda}_i M_1) x_{i1} + \lambda_{i2} M_0 H_q \\ - (H_q)^T M_1 x_{i1} - \frac{1}{2} x_{i1}^T M_0 x_{i1} \end{bmatrix}, \text{ 可同样按上述步骤求得 } x_{i2}.$$

至于三阶及三阶以上项的求解方法与以上步骤完全相同, 只需在有关展开式中保留到 $O(X^3)$ 即可, 在此不再赘述.

3 算例与结论

考虑如下的三自由度系统

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = 0$$

原系统 (即 K_0, M_0 系统) 的三个特征值是: $1, 1 \pm T, 2$; 对应的特征向量是: $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$.

3.1 相近特征值 ($T=0.05$ 时) 及孤立特征值情况

(1) 选取 $1, 1.05$ 两阶相近特征值对应的向量张成子空间, 即取 $H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ 进行计算, 所得新系统前两阶特征对的近似解见表 1所示.

表 1 相近特征值情况 ($T=0.05$, 前两阶) 对应的近似解

Tab. 1 Approximation solutions of the nearly equal eigenvalues case

项 目	第 1阶		第 2阶	
	特征值	特征 向量	特征值	特征向量
精确解	0.968 418 (0.845 18, -0.533 85, 0.0258 8)		1.078 951 (0.534 47, 0.843 94, -0.045 81)	
一阶近似解	0.969 098 (0.850 65, -0.525 73, 0.025 50)		1.080 902 (0.525 73, 0.850 65, -0.046 28)	
二阶近似解	0.968 428 (0.842 63, -0.538 07, 0.025 50)		1.078 933 (0.539 51, 0.840 86, -0.046 28)	

(2) 对于孤立特征值情况 (即 $T=0.05$ 时本例的第 3阶特征值), 选取 $H=(0, 0, 1)^T$, 按本文方法求解, 结果见表 2所示.

表 2 孤立特征值情况 ($T=0.05$, 第 3阶) 对应的近似解

Tab. 2 Approximation solutions of the distinct eigenvalue case

项 目	特征值	特征向量
精确解	2.002 631	(0.002 62, 0.052 55, 0.998 61)
一阶近似解	2	(0, 0.052 63, 1)
二阶近似解	2.002 631	(0.002 63, 0.052 63, 0.998 61)

3.2 相重特征值情况 ($T=0$ 时)

计算结果见表 3所示.

表 3 相重特征值情况 ($T=0$, 前两阶) 对应的近似解

Tab. 3 Approximation solutions of the equal eigenvalues case

项 目	第 1阶		第 2阶	
	特征值	特征 向量	特征值	特征向量
精确解	0.948 797 (0.698 25, -0.715 05, 0.034 01)		1.048 703 (0.715 85, 0.697 29, -0.036 65)	
一阶近似解	0.95 (0.707 11, -0.707 11, 0.033 67)		1.05 (0.70711, 0.70711, -0.037 22)	
二阶近似解	0.948 809	(未计算)	1.048 684	(未计算)

从以上的算例可以充分看出, 本文方法对孤立特征值、相近特征值及相重特值情形均具有足够的计算精度, 表明本文的方法是正确的、合理可靠的.

参 考 文 献

- 1 Chen J C, Wada B K. Matrix perturbation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 1977, 15 (8): 1095~ 1100
- 2 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987. 20~ 50
- 3 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆: 重庆出版社, 1991. 19~ 26
- 4 Chen Jingyu, Liu Jike, Zhao Lingcheng. An improved perturbation method for free vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 180 (3): 519~ 523

A Successive Approximation Procedure for the Generalized Eigenvalue Perturbation Problem

Liu Jike^{} Gao Lei*

Abstract For the generalized eigenvalue perturbation problem of real modes, an efficient method is put forward, which is applicable to all the three cases of eigenvalue problems distinct, repeated and nearly equal eigenvalues. This method is a kind of successive approximation procedure, developed by performing an orthogonal decomposition and a sub-space condensation and by using the singular value decomposition of real matrix. Some illustrative examples are presented to demonstrate the validity of this proposed technique.

Keywords perturbation, eigenvalue problem, structural vibration

^{*} Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275