

彗—木相撞辐射引力波的估算*

崔世治 郑庆璋

(中山大学物理学系, 广州 510275)

摘要 选用一合理的模型, 估算了 1994 年 7 月发生的彗 (SL9)—木相撞辐射引力波的强度和功率. 所得结果表明引力辐射强度远低于目前引力波检测装置所达到的灵敏度. 计算过程与所得结果富有启发性.

关键词 彗—木相撞, 引力波辐射

分类号 P 142. 84, O 412. 1

1994 年 7 月 16 日至 22 日, 彗星 SL9 的多块碎片, 与木星相继碰撞. 先后观察到的碰撞有 22 次之多, 尤以其中第 G 块最大的碎片, 撞击最为壮观. 根据估算和观测^[1, 2], 碰撞时地—木—日夹角为 11° , 撞击点—木星—地球夹角为 95° . 彗星碎裂前直径约 10 km, 密度 $\leq 0.8 \text{ g cm}^{-3}$, 彗星碎块最大直径约 4 km. G 碎块碰撞后在木星表面产生的暗斑大小约 $3 \times 10^4 \text{ km}$, 估计其撞击能量相当于 $6 \times 10^{12} \text{ t TNT}$ 爆炸当量.

本文据此估算 G 碎块撞击木星时产生的引力波强度和功率. 先把已知数据整理列出如下:

木星质量 $m_J \approx 2 \times 10^{27} \text{ kg}$; 木星半径 $r_J \approx 11.2 r_e \approx 7 \times 10^7 \text{ m}$ (地球半径 $r_e \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}$); 彗星碎块落到木星表面时的速度就是木星的“逃逸速度”, 数值是 $w \approx 6 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 木星的轨道半径 $R_J = 5.2 \text{ A. U.} \approx 8 \times 10^{11} \text{ m}$; 地球轨道半径 $r_E = 1 \text{ A. U.} \approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$.

彗—木碰撞时, 由地—木—日夹角 $\approx 11^\circ$, 可推算出地—木距离为 $R \approx 5.1 \text{ A. U.} \approx 7.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

由密度和直径不难估算出 G 碎块的质量 $m_0 = d(4\pi/3)(d/2)^3 \approx 3 \times 10^{13} \text{ kg}$. 它达到木星表面时具有动能 $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 \approx 5 \times 10^{22} \text{ J}$. 考虑到 1 kg TNT 的能量当量为 $6 \times 10^6 \text{ J}$, 故上述动能值与彗星碎块的爆炸能量 $E \approx (6 \times 10^{12}) \times 10^8 \times (6 \times 10^6 \text{ J}) = 3.6 \times 10^{22} \text{ J}$ 同数量级. 这印证了上述对 m_0 值的估算值是合理的.

彗星碎块在万有引力作用下, 到达木星表面时, 其 \dot{r}, \ddot{r} 和 \dddot{r} 分别为 ($\dot{}$ 代表 d/dt):

$$\begin{aligned} \dot{r}_J &= -\dot{g} \approx -6 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \ddot{r}_J &= -Gm/r^2 \approx -2.3 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \dddot{r}_J &= (2Gm/r^3)\dot{r} \approx -5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-3} \end{aligned} \quad (1)$$

* 广东省自然科学基金资助项目

收稿日期: 1995-05-15 崔世治, 男, 59 岁, 教授

1 碰撞过程辐射引力波的计算公式

引力辐射强度与功率由熟知的公式^[3]与源的质量四极矩 Q_{ij} 的时间导数相联系

$$\left. \begin{aligned} h_{22} &= -h_{33} = \frac{2G}{c^4 R_o} \left[\frac{\ddot{Q}_{22} - \ddot{Q}_{33}}{2} \right] \\ h_{23} &= h_{32} = \frac{2G}{c^4 R_o} \ddot{Q}_{23} \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \left[\overset{\dots}{Q}_{ij}^2 - \frac{1}{3} \overset{\dots}{Q}_{kk}^2 \right] \quad (2b)$$

$$Q_{kj} = \int dx^k x^j d^3x \quad (2c)$$

若取 x^2 轴通过木星质心且认为彗星碎块沿 x^2 轴移动, 则当 m_o 与木星质心相距为 r 时, 由于 $m_J \gg m_o$, 故不难算出 Q_{kj} 及其各阶时间导数仅有下述非零分量

$$Q_{22} = m_o r^2, \quad \dot{Q}_{22} = 2m_o \dot{r}, \quad \ddot{Q}_{22} = 2m_o (\dot{r}^2 + r\ddot{r}), \quad \overset{\dots}{Q}_{22} = 2m_o (3\dot{r}\ddot{r} + r\overset{\dots}{r}) \quad (3)$$

代入 (2) 式可得

$$h_{22} = -h_{33} = (2Gm_o / c^4 R_o) (\dot{r}^2 + r\ddot{r}) \quad (4)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} (\overset{\dots}{Q}_{22}^2 - \frac{1}{3} \overset{\dots}{Q}_{22}^2) = \frac{8Gm_o^2}{15c^5} (3\dot{r}\ddot{r} + r\overset{\dots}{r})^2 \quad (5)$$

2 $\dot{r}, \ddot{r}, \overset{\dots}{r}$ 的估算

就目前所知, 木星的大气层厚达 1 万 km 以上, 由于彗星碎块在“碰撞”前速度很高, 因而在进入木星大气稠密层时受到摩擦阻力而发热. 彗星碎块的导热速率可以认为与声速大致一样, 即 $\sim 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 碎块的线度 $\sim 10^3 \text{ m}$, 故加热整块彗星残骸使之升温到足够高而爆炸, 所需时间为 1 s 数量级. 以 $\approx 6 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 估算, 可知彗星残骸应穿过数 10 km 的稠密大气层. 相对于木星 1 万 km 的大气层来说, 这层大气的密度变化可忽略. 在这范围内木星的引力加速度的变化亦可以忽略. 于是, 由牛顿运动定律, 有

$$m_o \ddot{r} = -kr^2$$

即 $\ddot{r} = -\tau r^2$ (其中 $\tau = k/m_o \sim$ 常量) (6)

取 $\dot{r} = v$ 时 $t = 0$, 对 (6) 式积分得

$$\dot{r} = -v_o / (1 - \tau v_o t)^2, \quad r = \tau^{-1} \ln(1 - \tau v_o t) + r_o, \quad (v_o = \dot{r}|_{t=0}) \quad (7)$$

r 对 t 的高阶导数为

$$\ddot{r} = -\tau v_o / (1 - \tau v_o t)^2, \quad \overset{\dots}{r} = -2\tau^2 v_o^2 / (1 - \tau v_o t)^3 \quad (8)$$

设当 $t = t_1$ 时, $r = r_1 = -a$, 则

$$-\tau a = \ln(1 - \tau v_o t_1) \quad (9)$$

又设在这过程中动能减少 V 倍, 即

$$E_k / E_{k_o} = \frac{1}{2} m v^2 / \frac{1}{2} m v_o^2 = (1 - \tau v_o t_1)^{-2} = V$$

或 $1 - \tau v_o t_1 = V^{-1/2}$ (10)

(9) 式与 (10) 式比较, 得

$$\tau = \ln V / 2a \quad (11)$$

取 $a = 5 \times 10^4 \text{ m}$, $V = e^{-2}$, 于是有

$$\tau = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad (12)$$

而 $t_1 = (e - 1) / (-\tau v_o) \approx 1.4 \text{ s}$

于是,当 $t = 0$ 时,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_0 &= -\dot{g} = -8 \times 10^4 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-1} \\ \ddot{r}_0 &= -\ddot{V}_v^2 \approx 7.2 \times 10^4 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-2} \\ \dddot{r}_0 &= -2\ddot{V}_v^3 \approx -1.7 \times 10^5 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

而当 $t = t_1$ 时,

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_1 &= e^{-1} \dot{r}_0 \approx 2.2 \times 10^4 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-1} \\ \ddot{r}_1 &= e^{-2} \ddot{r}_0 \approx 9.7 \times 10^3 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-2} \\ \dddot{r}_1 &= e^{-3} \dddot{r}_0 \approx -8.5 \times 10^3 \text{ m}^\circ \text{ s}^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由(13)与(14)式可见,在 $t = 0 \sim t_1$ 这段时间内,确实有 $\ddot{r} \gg \ddot{r}_v$, 即相对于阻力加速度来说,忽略引力加速度是合理的.

3 发射引力波的振幅及功率的估算

以有关数据代入(4)(5)式,得

$$\left. \begin{aligned} (h_{22})_0 &= (-h_{33})_0 = (2Gm_0/c^4 R_0) (\dot{r}_0^2 - r_0 \ddot{r}_0) \approx -3 \times 10^{-30} \\ (-dE/dt)_0 &= (8Gm_0^2/15c^5) (3\dot{r}_0 \ddot{r}_0 + r_0 \dddot{r}_0) \approx 1.6 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \\ (h_{22})_{t_1} &= (-h_{33})_{t_1} = e^{-2} (h_{22})_0 \approx 4 \times 10^{-31} \\ (-dE/dt)_{t_1} &= e^{-6} (-dE/dt)_0 \approx 4 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

4 关于碎块下落及爆炸过程辐射的引力波

关于碎块爆炸时的引力辐射,可大致估算如下:设过程中有关的质量、特征速率及特征时间分别为 m, v, t , 则有关的质量四极矩对时间的三阶导数的特征值 $|\dddot{Q}| \approx m v^2 t^{-1}$. 发射引力波的功率为

$$P_{GW} \approx (G/c^5) |\dddot{Q}|^2 \approx (G/c^5) (m v^2/t)^2 \approx P^2 t / (8 \times 10^{52} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (16)$$

其中 P 为“内部能流”的特征功率,对于能量为 E 的爆炸过程,认为引力辐射功率

$$P_{GW} \approx (8 \times 10^{52} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1})^{-1} (E/t)^2 \quad (17)$$

是合理的,取爆炸的典型时间 $t \approx 10^3 \text{ s}$, 则

$$\begin{aligned} P_{GW} &\approx \frac{(8 \times 10^{12} \times 8 \times 10^9)^2}{[8 \times 10^{52} \times (10^3)^2]} \approx 4 \times 10^{-2} (\text{J} \cdot \text{s}^{-1}) \\ E_{GW} &\approx P_{GW} \cdot t \approx 4 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

与上节结果相比较,显然是小得多了.另一方面,将(1)式与(13)(14)式比较亦不难看出,碎块向木星表面自由下落的过程中所产生的引力辐射同样是相对弱得多.

5 讨论

(1)辐射的最大功率出现在彗星碎块最初进入木星稠密大气层时而不是在最后激烈的爆炸过程,乍一看来似乎不可思议.然而辐射引力波靠的是质量四极矩的变化.在彗星碎块爆炸前,系统的质量四极矩由碎块和庞然大物的木星共同组成,因而是比较大的.至于碎块的爆炸,过程虽然激烈,但有关系统的质量四极矩仅由彗星残骸各部分组成,比前者要小得多了.因而,引力辐射的最大功率落在前者就不足为怪了.

(2)按以上的估算,彗星 SL9 碎块撞击木星辐射的最大引力波功率约 1.6 W , 振幅 $h \sim 3 \times 10^{-30}$, 这远远低于目前引力波探测系统的灵敏度 $h \sim 10^{-18} \sim 10^{-19}$ 以及即将达到的灵敏度 $h \sim 10^{-20} \sim 10^{-21}$. 因此在太阳系内类似的碰撞所产生的引力波是不可能探测到的.除非有质量相当于地球大小 ($m_\oplus \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$, 比彗 SL9 碎块的 m_0 大 10^{11} 倍) 的天体与木星相撞.但

这种可能性是极小的.

(3)木星绕太阳公转所辐射的引力波功率达 $5.3 \times 10^3 \text{ W}^{[4]}$, 比彗-木相撞所辐射的要大得多了. 然而, 不同的是, 木星公转所辐射的引力波频率约为 10^{-7} Hz , 这是一个极低的频率; 而彗-木碰撞激发的引力波的峰值频率却在 $10^3 \sim 1$ 之间. 无论是对排除噪声干扰或测量而言, 后者都比前者容易得多.

(4)就激发引力波而言, 爆炸当量相当于 6 万亿 t TNT 炸药的彗-木碰撞, 相当于在离引力波探测器数 100 km 处一枚 600 万 t TNT 级氢弹的爆炸, 由此可见, 企图在地球上爆炸氢弹产生可探测的引力波是不可能的. 同样, 若有比彗 SL9 的碎片大 10 倍的天体撞击地球, 尽管会对地球上的生物产生毁灭性打击, 但所激发的引力波仍是目前的探测器所无法感知的.

参 考 文 献

- 1 Stephen G Benka. Astronomers are poised for the crash of 1994: Boom or bust? *Phys Today*, 1994, 47(6): 19
- 2 傅承启. 彗木相撞事件记要. *科学*, 1994, 46(5): 60
- 3 郑庆璋, 崔世治. 广义相对论基本教程. 广州: 中山大学出版社, 1991. 311~ 312

An Estimate of Gravitational Wave from Collision of Comet SL9 with Jupiter

*Cui Shizhi** *Zheng Qingzhang*

Abstract In this paper, we estimate the intensity and power of gravitational wave from collision of Comet SL9 with Jupiter, by a reasonable model. The result shows that intensity of the gravitational radiation is far under the sensitivity of the present detectors, as we can presuppose. Nevertheless, the calculations and results in this paper are enlightening.

Keywords collision of Comet SL9 with Jupiter, gravitational radiation

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275